Friedrich-Schiller-Universität Jena

seit 1558

Prof. Tobias Jäger

Analysis I-III

15. Mai 2019

LaTeX-Skript von:

Martin Beyer

Inhaltsverzeichnis

1 Logik und Mengen:

$\neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$ (De Morgansche Regeln)
$a \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow a$ (Absorption)
$a \vee a \Leftrightarrow a \quad a \wedge a \Leftrightarrow a$ (Idempotenz)
$a \wedge \neg a \Leftrightarrow 0 \quad a \vee \neg a \Leftrightarrow 1$ (Kontradiktion/Tautologie)
$a \Rightarrow b \Longleftrightarrow \neg a \vee b \Longleftrightarrow \neg b \Rightarrow \neg a$ (Implikation)
$a \Leftrightarrow b \Longleftrightarrow \neg a \Leftrightarrow \neg b$ (Äquivalenz)
$Ac := X \setminus A := \{x \mid (x \in X) \wedge (x \notin A)\}$ (Differenz)
$A = B :\Leftrightarrow [x \in A \Leftrightarrow x \in B]$ (Gleichheit)
$A \subseteq B :\Leftrightarrow [x \in A \Rightarrow x \in B]$ (Inklusion)
$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$ (Vereinigung)
$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid \forall i \in I : x \in A_i\}$ (Durchschnitt)

Reflexivität: $\forall x \in X : x \sim_R x$
Symmetrie: $\forall x, y \in X : x \sim_R y \Leftrightarrow y \sim_R x$
Transitivität: $\forall x, y, z \in X : [x \sim_R y \wedge y \sim_R z] \Rightarrow [x \sim_R z]$
Antisymmetrie: $\forall x, y \in X : x \sim_R y \wedge y \sim_R x \Leftrightarrow y = x$
$\forall x, y \in X : x \geq y \vee x \leq y \Rightarrow (X, \leq)$ wohlgeordnet
Bildoperator: $A \mapsto F(A) := \{F(x) \mid x \in A\}$
Urbildoperator:$B \mapsto F^{-1}(B) := \{x \in X \mid F(x) \in B\}$

2 Gruppen, Ringe, Körper:

2.1 Gruppen: $(G, \circ)$

G1: $\forall g, h, i \in G : (g \circ h) \circ i = g \circ (h \circ i)$ (Assoziativiät)
G2: $\exists e \in G \forall g \in G : g \circ e = g$ (Neutrales Element eindeutig)
G3: $\forall g \in G \exists g' \in G : g \circ g^{-1} = e$ (Existenz von Inversen)
G4: $\forall g, h \in G : g \circ h = h \circ g$ (Kommutativität)
S.2.1.2 $h \circ g = i \circ g \Rightarrow h = i$ (Kürzungsregeln, Eind.Inv)

Gruppenhomomorphismus: $\Phi : (G, \circ) \to (H, \star)\ \forall g, h \in G : \Phi(g \circ h) = \Phi(g) \star \Phi(h)$
Gruppenisomorphismus: bijektiver Homomorphismus
Gruppenendomorphismus: $G = H$
Gruppenautomorphismus: bijektiver Endomorphismus
Kern von Φ : $\mathrm{kern}(\Phi) = \{g \in G \mid h(g) = e_H\}$
Injektivität: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
Surjektivität: $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$
$H \subseteq G$ Untergruppe, wenn $\forall g, h \in H : g \circ h^{-1} \in H$

2.2 Ringe: $(R, \oplus, \star)$

R1: $(R, \oplus)$ abelsche Gruppe mit $n \in \mathbb{R}$ (additive Struktur)
R2: $(R, \star)$ ist assoziativ (Assoziativität d. Multiplikation)
R3: $a \star (b \oplus c) = (a \star b) \oplus (a \star b)$ (Distributivität)
R4: $(R, \star)$ ist kommutativ mit $e \in \mathbb{R}$ (Kommutativität)
S.2.2.2: $a \star n = n$, $(-a) \star (-b) = a \star b$, $-a = (-e) \star a$

2.3 Körper: $(K, \circ, \star)$

K1: $(K, \oplus)$ abelsch mit $n \in \mathbb{K}$ (additive Struktur)
K2: $(K \backslash \{n\}, \star)$ abelsch mit $e \in \mathbb{K}$ (multiplikative Struktur)
K3: $a \star (b \oplus c) = (a \star b) \oplus (a \star b)$ (Distributivität)
L.2.2.5: $(-x)^{-1} = -(x)^{-1}$, $x \star y = n \Leftrightarrow x = n \vee y = n$
L.2.2.6: $T \subseteq K$, Körper, wenn $x + y \in T$, $-x \in T$, $x^{-1} \in T$

Ein Tupel $(K, \oplus, \star, \leq)$ heißt geordneter Körper, falls eine totale Ordnung auf K gegeben ist:
O1: $\forall x, y, z \in K : x \leq y \Rightarrow x \oplus z \leq y \oplus z$
O2: $\forall x, y, z \in K : x \leq y \wedge n \leq z \Rightarrow x \odot z \leq y \odot z$

Supremum: $(\forall x \in M : x \leq C) \wedge (\forall c < C \exists x \in M : c < x)$
Infimum: $(\forall x \in M : x \geq C) \wedge (\forall c > C \exists x \in M : c > x)$
$sup(M)$ kleinste obere Schranke $inf(M)$ größte untere Schranke
Ordnungsvollständigkeit $\Leftrightarrow$ Supremumseigenschaft
S.2.4.4: Sei $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper: $\forall x, y \in \mathbb{K} : |x + y| \leq |x| + |y|$ und $||x + y| - |x|| \leq |y|$ (Dreiecksungleichung)
B.2.4.5: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$ (kleiner Gauß)
$\sum_{k=1}^{n} (2 * k - 1) = n^2$
$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
S.2.4.7: $\mathbb{Z} = \{n - m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ $\quad \mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$
B.2.7.6: Eine Menge M heißt abzählbar, falls eine injektive Abbildung $M \to \mathbb{N}$ existiert.
H.7.1: $\binom{x}{0} = 1$, $\binom{x}{1} := x$, $\binom{x}{k+1} := \binom{x}{k} \cdot (\frac{x-k}{k})$, $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
$\sigma(x) = 1 : x > n, \quad 0 : x = n, \quad -1 : x < n \quad |x| := \sigma(x) \star x$
$\sigma(x \star y) = \sigma(x) \star \sigma(y)$; $|x^{-1}| = |x|^{-1} (x \neq 0)$; $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

3 Konvergenz von Folgen und Reihen

3.1 Konvergenz von Folgen:

Folge nach oben beschränkt $\Leftrightarrow$ Menge nach oben beschränkt
Folge monoton wachsend: $x_{n+1} \geq x_n$
Konvergenz: $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |x_n - x| < \epsilon$
Bestimmte Divergenz: $\forall C \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : x_n \geq C$
S.3.1.2: Konvergiert eine reelle Folge, ist der Grenzwert eindeutig.
L.3.1.3: Konvergente reelle Folgen sind beschränkt.
S.3.1.4: $\lim x_n + \lim y_n = \lim(x_n + y_n) \quad \lim x_n \cdot \lim y_n = \lim(x_n \cdot y_n)$
$y_n = x_n^{-1}\ x_n \neq 0\ (y_n = 0$ falls $x_n = 0)$ $\lim y_n = (\lim x_n)^{-1}$
$\lim |x_n| = |\lim x_n| \quad x_n \leq y_n \Rightarrow \lim x_n \leq \lim y_n$, $(x_n, y_n$ konv.)
S.3.1.6: Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte reelle Folge konvergiert $\lim x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
B.3.1.8: Für alle beschränkten reellen Folgen existieren
$\limsup n \to \infty x_n = \inf\{\sup\{x_k \mid k \geq n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\liminf$
P.7.2: $\limsup n \to \infty x_n = -\liminf n \to \infty(-x_n)$
S.3.1.11: Satz von **Bolzano-Weierstraß**: Alle beschränkten reellen Folgen besitzen konvergente Teilfolgen.
L.3.1.12: Existiert der Limes superior für eine Folge, so existiert eine Teilfolge mit diesem Grenzwert.
Cauchy-Folge: $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N$: $|x_n - x_m| < \epsilon$
S.3.1.15: reelle Folge konvergiert $\Leftrightarrow$ Cauchyfolge $\Rightarrow$ Körper genügt Vollständigkeits- und archimedischem Axiom.
S.3.1.17: Jede reelle Folge besitzt eine monotone Teilfolge.
S.3.1.18: $A \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen $\Leftrightarrow \forall x_n \in A \forall n \in \mathbb{N} \lim x_n \in A$
S.3.1.19: $U \subseteq \mathbb{R}$ offen $\Leftrightarrow \forall x \in U \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \subseteq U \Leftrightarrow \mathbb{R} \backslash U$ abgeschlossen, $B_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} || x - y| < \epsilon\}$
L.3.1.21: **Majoranten-Kriterium**: $0 \leq x_n \leq y_n \wedge \lim y_n = 0 \Rightarrow \lim x_n = 0$
S.3.1.24: **Binomialformel**: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$
H.8.2: $\lim_{n \to \infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} |x_n| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} (x_n)^2 = 0$
H.9.1: $\lim_{n \to \infty} (\sqrt[n]{n})_{n \in \mathbb{N}} = 1$
P.9.2: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konverg. in $x \in \mathbb{C} \Rightarrow (\overline{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ konverg. in $\overline{x}$

3.2 Konvergenz von Reihen:

Voraussetzung für Konvergenz: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.
$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n = \frac{\lambda}{1-\lambda} \quad \forall |\lambda| < 1$ Geometrische Reihe
L.3.2.3: Reihe $\sum x_n$ konvergent, falls $\sum |x_n|$ konvergiert
B.3.2.4: Cauchy-Kriterium: $\sum x_n$ konvergiert $\Leftrightarrow$
$\forall \epsilon > 0 \exists \in \mathbb{N} : |s_m - s_n| = |\sum_{k=n+1}^{m} x_k| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |x_k| < \epsilon$
L.3.2.5: Ist für eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht-negativer reeller Zahlen die Folge der Partialsummen beschränkt, so konvergiert die entsprechende Reihe.
B.3.2.7: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert gegen $+\infty$ (Harmonische Reihe)
B.3.2.8: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$ (konvergent)
S.3.2.9: **Majoranten-Kriterium**: $0 \leq |x_n| \leq y_n \wedge \sum y_n$ konvergiert $\Rightarrow \sum x_n$konvergiert absolut.
H.9.3: **umgekehrtes Majoranten-Kriterium**: $0 \leq x_n \leq y_n \wedge \sum x_n$ divergiert bestimmt $\Rightarrow \sum y_n$ divergiert bestimmt.
S.3.2.12: **Wurzelkriterium**: $\limsup \sqrt[n]{|x_n|} < 1 \Rightarrow \sum x_n$ konvergiert absolut. (>1: nicht konvergent)
S.3.2.15: **Quotienten-Kriterium**: $\exists \lambda \in (0, 1) \exists N \in \mathbb{N}$
$\forall n \geq N : |\frac{x_{n+1}}{x_n}| \leq \lambda \Rightarrow \sum x_n$ ist absolut konvergent.
S.3.2.18: **Leibniz-Kriterium**: x_n monoton fallende Nullfolge $(x_n \in \mathbb{R}^+) \Rightarrow \sum (-1)^n x_n$ konvergiert. (nicht absolut!)
S.3.4.0: $\sum x_n + y_n = \sum x_n + \sum y_n$ falls x_n und y_n konvergent.
S.3.4.1: **Cauchy-Produkt**: $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k \cdot y_{n-k} = (\sum x_n) \cdot (\sum y_n)$ falls x_n absolut konvergent und y_n konvergent.

3.3 Exponential-, Trigonometrische Fkt.:

$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\quad e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$
B.3.4.4: exp ist strikt monoton wachsend $\Rightarrow$ Injektivität
L.3.4.5: $\overline{\exp(i \cdot \alpha)} = \exp(-i \cdot \alpha)$ $\quad |\exp(i \cdot \alpha)| = 1$
$\cos x = \Re(\exp(i \cdot x)) = \frac{(\exp(i \cdot x) + \exp(-i \cdot x))}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\sin x = \Im(\exp(i \cdot x)) = \frac{(\exp(i \cdot x) - \exp(-i \cdot x))}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$z = r \cdot [\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)] = r \cdot \exp(i \cdot \varphi)$
$r = |z| = \sqrt{\Im(z)^2 + \Re(z)^2}$
$\varphi = \arctan\left(\frac{\Im(z)}{\Re(z)}\right)$
S.3.4.7: $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) \pm \cos(\beta)\sin(\alpha)$
P.9.1: $\sinh(x) = \frac{1}{2} \cdot (\exp(x) - \exp(-x))$ $\quad \sinh'(x) = \cosh(x)$
$\cosh(x) = \frac{1}{2} \cdot (\exp(x) + \exp(-x))$ $\quad \cosh'(x) = \sinh(x)$
Wichtige Identitäten: $\exp(i \cdot \pi) = -1$ $\quad i^i = \exp(-\frac{\pi}{2})$

4 Stetigkeit:

Definition: $\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall y \in B_\delta(x) \cap A : |f(y) - f(x)| < \epsilon$
S.4.1.2: $f : A \to B$ stetig in $x \in Af(x) \in B, g : B \to \mathbb{R}$ stetig in $f(x) \Rightarrow g \circ f$ stetig in x.
K.4.1.3: f stetig auf A und g stetig auf $B \Rightarrow g \circ f$ stetig
Häufungspunkt: $A \subseteq \mathbb{R} x \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von A, falls $x_n \in A \backslash \{x\}$ existiert mit $\lim x_n = x$
B.4.1.4: Ist A nach oben (unten) unbeschränkt, heißt ∞ $(-\infty)$ Häufungspunkt von A
B.4.1.5: f ist stetig in $x \in A \Leftrightarrow \lim_{x' \to x} f(x') = f(x)$
L.4.1.6: (x ist Häufungspunkt von A) $a = \lim_{x' \to x} f(x') \Leftrightarrow \forall x_n \in A$ mit $\lim x_n = x \Rightarrow \lim f(x_n) = a$
L.4.1.7: f ist stetig in $x \in A \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$ mit $\lim x_n = x$: $\lim f(x_n) = f(x)$
L.4.1.9: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig $\Leftrightarrow \forall U \subseteq \mathbb{R}$ (U offen): $f^{-1}(U)$ offen.
H.11.3: Unstetigkeitsstelle 1. Art $\Leftrightarrow \lim_{n \nearrow x} x_n \neq \lim_{n \searrow x} x_n$
Unstetigkeitsstelle 2. Art $\Leftrightarrow \lim_{n \nearrow x} x_n \vee \lim_{n \searrow x} x_n$ existieren nicht.

4.1 Stetigkeit und Kompaktheit:

S.4.2.1: **Zwischenwertsatz**: $a < b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und O.B.d.A.$f(a) < f(b)$:
$\forall y \in (f(a), f(b)) \exists x \in (a, b) : f(x) = y$
Eine Menge A heißt **abgeschlossen**, falls für jede Teilfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in A \; \forall n \in \mathbb{N}$ auch $x = \lim_{n \to \infty} \in A$ ist. Eine Menge heißt **beschränkt**, falls sie ein Supremum und Infimum besitzt. Eine Menge heißt **kompakt**, falls sie abgeschlossen und beschränkt ist.
S.4.2.2: A kompakt f: $A \to \mathbb{R}$ stetig $\exists x \in A$: $f(x) = \max f(a)$
f nimmt also auf A ein Maximum an (Analog Minimum).
Stetige Funktionen auf kompakten Mengen sind immer beschränkt.
B.4.2.3 f gleichmäßig stetig auf $A \subseteq \mathbb{R}$:
$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in A : x' \in B_\delta(x) \cap A \Rightarrow f(x') \in B_\epsilon(f(x))$
S.4.2.6: Ist A kompakt und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f auf A auch gleichmäßig stetig.
H.11.3: Monotone Folgen haben keine Unstetigkeitsstellen 2. Art und maximal abzählbar viele Unstetigkeitsstellen 1. Art.

4.2 Anwendung auf spezielle Funktionen:

L.4.3.1: Reelle (komplexe) Polynome sind auf $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) stetig.
S.4.3.2: exp(x) ist auf ganz $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ stetig
K.4.3.3: Trigonometrische Fkt. sin und cos sind auf $\mathbb{R}$ stetig.
K.4.3.4: $\exp \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ bildet bijektiv ab.
K.4.3.5: $\log \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \, x \mapsto \log(x) = \exp^{-1}(x)$ Umkehrfunktion
K.4.3.6: $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$
S.4.3.7: f bijektiv $\Rightarrow f$ ist strikt monoton wachsend (fallend). Ist f strikt monoton wachsend, so wächst f^{-1} ebenfalls strikt monoton. Stetigkeit überträgt sich ebenfalls auf f^{-1}.
B.4.3.8: $\sqrt[n]{x} = \exp \frac{\log x}{n} = \sup\{y \in \mathbb{R} \mid y^n \leq x\}$
$a^x = \exp(x \cdot \log a)$ $\quad a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{a})^p$ $\quad \log_a x = \frac{\log x}{\log a}$
$\log(a^x) = x \cdot \log(a)$

5 Differentiation:

5.1 Differenzierbarkeit:

Existiert für $x \in (a, b)$ $f'(x) = \lim_{x' \to x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$, so ist f in x differenzierbar und f' die Ableitung von f in x.
Ist $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto f'(x)$ stetig, so heißt f stetig diffbar.
Schreibweise: $\frac{d}{dx} f(x)$ oder $\frac{df}{dx}(x)$
L.5.1.2: Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ diffbar, so ist f auch stetig.
B.5.1.4: $\lim_{x' \to x} f(x')$ existiert $\Leftrightarrow \lim_{x' \nearrow x} f(x') \wedge \lim_{x' \searrow x} f(x')$ existieren und stimmen überein.
S.5.1.5: Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Dann ist f genau dann in $x \in (a, b)$ diffbar, falls es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, sodass: $u(x') = f(x') - f(x) - A(x' - x)$ die Bedingung $\lim_{x' \to x} \frac{u(x')}{x - x'} = 0$ erfüllt.
B.5.1.6: **Landau-Notation**: $f(x') = f(x) + (x' - x) * f'(x) + o(|x' - x|)$

5.2 Ableitungsregeln:

(a) $(f * g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (L.5.2.1 Produktregel)
(b) $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$ (L.5.2.1 Quotientenregel)
(c) $(x^{n+1})' = (n + 1) \cdot x^n$ (B.5.2.2 Potenzregel)
(d) $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ (S.5.2.3 Kettenregel)
(e) $(u(x)^{v(x)})' = u(x)^{v(x)} \cdot (\ln(u(x)) \cdot v(x))$

5.3 Weitere Folgerungen:

Seien $a < b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ hat in $x \in (a, b)$ ein lokales Minimum (Maximum) falls gilt: $\exists \delta > 0 \, \forall x' \in B_\delta(x) : f(x') \geq f(x)$ $\quad (f(x') \leq f(x))$
S.5.3.1: Hat f in x ein lokales Maximum/Minimum: $f'(x)$=0
Der Extrempunkt heißt absolut, falls Ungleichung strikt ist und global, falls $B_\delta(x)$ durch ganz (a, b) ersetzt werden kann.
S.5.3.2: **Mittelwertsatz** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) diffbar: $\exists x \in (a, b) : f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
K.5.3.3: $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar:
(a) ist $f'(x) > 0 \, \forall x \in (a, b)$, so ist f strikt monoton wachsend.
(b) ist $f'(x) = 0 \, \forall x \in (a, b)$, so ist f konstant.
(c) ist $f'(x) < 0 \, \forall x \in (a, b)$, so ist f strikt monoton fallend.
K.5.3.4: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf (a, b) diffbar und gilt $f'(x) > c \, \forall x \in (a, b) : f(x) \geq f(a) + c(x - a) \, \forall x \in (a, b)$.
S.5.3.5: $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig diffbar, $x \in (a, b)$ $f'(x) \neq 0$
$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ mit $y = f(x)$
$1 = Id'_{\mathbb{R}}(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x)$

5.4 Anwendung auf spezielle Funktionen:

$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{n} a_k \cdot \frac{k!}{(k-j)!} \cdot x^{k-j}$
S.5.4.1: exp auf ganz $\mathbb{R}$ diffbar mit: $\forall x \in \mathbb{R} : \exp'(x) = \exp(x)$
K.5.4.2: Logarithmus auf $\mathbb{R}^+$ diffbar mit $\log'(x) = \frac{1}{x}$
K.5.4.4: $\sin'(x) = \cos(x)$ $\quad \cos'(x) = -\sin(x)$
K.5.4.5: $\sin(-x) = -\sin(x)$ $\quad \cos(-x) = \cos(x)$
L.5.4.6: $(a^x)' = \log(a) \cdot a^x$
P.12.2: $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $\quad \arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

5.5 Taylor-Entwicklung:

S.5.5.1: Sei $f(a, b) \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar. Dann existiert zu jedem Paar von Punkten $x, x_0 \in (a, b)$ ein $\xi = \xi(x, x_0) \in (a, b)$ zwischen x und x_0, sodass gilt:
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + \frac{f^{(k)}(\xi) - f^{(k)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$
$P_n(x)$ = n-tes Taylor-Polynom mit Entwicklungspunkt x_0
B.5.5.2: $\lim_{x \to x_0} f^{(n)}(\xi(x_0, x)) = f^{(n)}(x_0)$
$f(x) = P_n(x) + o(|x - x_0|^n)$
Das n-te Taylor-Polynom ist eine polynomiale Approximation n-ter Ordnung von f und als solche eindeutig bestimmt.

6 Riemannsche Integration

6.1 Konstruktion des Riemann-Integrals

Ist $X = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, so nennen wir $\mathcal{I} = (I_j)_{j=1}^n$ eine endliche **Intervallpartition** von x, falls $\mathcal{I}$ eine Partition von X und jedes I_j ein Intervall ist.
B.6.1.1: Intervallpartitionen werden durch die Endpunkte der I_j (Unterteilungspunkte) eindeutig festgelegt: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, so schreibt man $\mathcal{I}(x_0, \ldots, x_n)$ für die entsprechende Intervallpartition $(I_j)_{j=1}^n$ mit Partitionsintervallen $I_j = (x_{j-1}, x_j]$.
$\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ Partitionen eines Raumes X: $\mathcal{Q}$ **verfeinert** $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q} \preccurlyeq \mathcal{P}$: $\forall Q \in \mathcal{Q} \, \exists P \in \mathcal{P} : Q \subseteq P$
Gemeinsame Verfeinerung : $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} = \{P \cap Q \mid P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$
B.6.1.2: Die gemeinsame Verfeinerung $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ ist wieder eine Partition von X und es gilt: $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \preccurlyeq \mathcal{P}$ und $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \preccurlyeq \mathcal{Q}$
Sind $\mathcal{I}$ und $\mathcal{I}'$ Intervallpartitionen der obigen Form, so gilt dies auch für $\mathcal{I} \vee \mathcal{I}'$.
Seien nun $a < b \in \mathbb{R}$. Eine Funktion $T : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Riemannsche **Treppenfunktion**, falls eine Intervallpartition $\mathcal{I}(x_0, \ldots, x_n) = (I_j)_{j=1}^n$ von $[a, b]$ und $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ existieren, sodass gilt: $x \in I_j \Leftrightarrow T(x) = y_j$.
Bezeichnet $\mathbf{1}_A$ die Indikatorfunktion einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}$, so lässt sich T in der Form $T(x) = \sum_{j=1}^n y_j \cdot \mathbf{1}_{I_j}$ schreiben.
Integral von T über $[a, b]$: $\displaystyle\int_a^b T(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^n y_j \cdot (x_j - x_{j-1})$
B.6.1.3: T sei eine Treppenfunktion zur Intervallpartition $\mathcal{I}$. Ist $\mathcal{J} \preccurlyeq \mathcal{I}$ so ist T auch zu dieser eine Treppenfunktion. Das Integral von T ist jedoch wohldefiniert.
B.6.1.4: Sind T und S zwei Treppenfunktionen auf $[a, b]$ mit Partitionen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$, so ist $T + S$ eine Treppenfunktionen mit Intervallpartition $\mathcal{I} \vee \mathcal{J}$.
Oberintegral $\displaystyle\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \inf\left\{\int_a^b T(x)\mathrm{d}x \mid T \in \mathcal{T}([a, b]), f \leq T\right\}$
Unterintegral $\displaystyle\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \sup\left\{\int_a^b T(x)\mathrm{d}x \mid T \in \mathcal{T}([a, b]), f \geq T\right\}$
Ist der Wert von Ober- und Unterintegral gleich, so schreiben wir $\int_a^b f(x)$. Die Funktion f heißt dann Riemann-integrierbar. $\mathcal{R}([a, b])$ ist die Menge aller Riemann-integrierbaren Funktionen auf dem Intervall.
L.6.1.5: Für jede beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt:
$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$$
B.6.1.6: Beweis der Integrierbarkeit einer beschränkten Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$: Für jedes $\varepsilon > 0$ existieren zwei Treppenfunktionen T^- und T^+ ($T^- \leq f \leq T^+$):
$$\int_a^b T^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b T^-(x)\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon$$
B.6.1.8: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $\mathcal{I} = (I_j)_{j=1}^n$ eine Intervallpartition von $[a, b]$, so definieren
$$T^- = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{1}_{I_j} \text{ mit } a_j = \inf\{f(x) \mid x \in I_j\}$$
$$T^+ = \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{1}_{I_j} \text{ mit } b_j = \sup\{f(x) \mid x \in I_j\}$$
zwei Treppenfunktionen, die $T^- \leq f \leq T^+$ erfüllen. T^- (T^+) ist die größtmögliche (kleinstmöglichste) Treppenfunktion unterhalb (oberhalb) von f.

6.2 Integrierbarkeit

S.6.2.1: Integrierbarkeit stetiger Funktionen
Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt $f \in \mathcal{R}([a, b])$.
B.6.2.2: Ist $f \in \mathcal{R}([a, b])$ und T eine Treppenfunktion mit $T \leq f$, so ist für jedes $M \in \mathbb{R}$ auch $T - M$ eine Treppenfunktion mit $T - M \leq f - M$:
$$\int_a^b f(x) - M\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - M(b - a)$$
$$\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
S.6.2.3: Linearität des Integrals
Seien $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}([a, b])$ und es gilt:
$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$
B.6.2.4: Angenommen $a < b < c$ und $f : [a, c] \to \mathbb{R}$. Dann ist $f \in \mathcal{R}([a, c])$ äquivalent zu $f_{[a,b]} \in \mathcal{R}([a, b])$ und $f_{[b,c]} \in \mathcal{R}([b, c])$:
$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$
B.6.2.5: Angenommen $f \in \mathcal{R}([a, b])$ und $\forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq M$:
$$-M \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M \cdot (b - a)$$
S.6.2.6: Für $f \in \mathcal{R}([a, b])$ seien $M^- = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ und $M^+ = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. Sei $\Phi : [M^-, M^+] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt $\Phi \circ f \in \mathcal{R}([a, b])$.
K.6.2.7: Sind $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$, so folgt:
a) $f \cdot g \in \mathcal{R}([a, b])$
b) $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$
c) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$
S.6.2.8: Ist $f : [a, b] \to R$ monoton wachsend, so gilt $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

6.3 Integrierbarkeit und Differentiation

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so heißt die diffbare Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ welche $F' = f$ erfüllt, eine Stammfunktion von f.
S.6.3.1 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf ganz (a, b) diffbar. Dann gilt $F' = f$ auf (a, b) genau dann, wenn für alle $x \in [a, b]$:
$F(x) = F(a) + \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ gilt.
L.6.3.2: Ist $f \in \mathcal{R}([a, b])$ und $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine auf (a, b) differenzierbare Funktion mit $F' = f$, so gilt:
$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
L.6.3.3: Sei $f \in \mathcal{R}([a, b])$ und $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
Dann ist F stetig. Ist zudem f im Punkt $x \in (a, b)$ stetig, so ist F in x differenzierbar und es gilt: $F'(x) = f(x)$.
B.6.3.5: Die Stetigkeit von f im Hauptsatz lässt sich nicht durch Riemann-Integrierbarkeit abschwächen. Sei $f : [-1, a] \to \mathbb{R}$ erklärt durch $f(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$. Dann hat $F(x) = \int_{-1}^x f(t)\,dt$ die einfache Darstellung
$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ und ist in $x = 0$ nicht differenzierbar.
K.6.3.6: Substitutionsregel
Sind $f : [a, b] \to [c, d]$ und $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x < y \in [a, b]$, so gilt:
$$\int_x^y f \circ g(t) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{g(x)}^{g(y)} f(s)\,\mathrm{d}s$$
K.6.3.8: (Partielle Integration)
Seien $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$, und $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $F' = f$ und $G' = g$. Dann gilt für $x < y \in [a, b]$
$$\int_x^y F(t) \cdot g(t)\,\mathrm{d}t = F(y) \cdot G(y) - F(x) \cdot G(x) - \int_x^y f(t) \cdot G(t)\,\mathrm{d}t$$

6.4 Erweiterungen des Riemann-Integrals

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Ist dann die Funktion $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ für jedes $x \in [a, b)$ auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar und existiert der

Grenzwert:
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{x \nearrow b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
so nennen wir diesen das **uneigentliche Riemann-Integral** von f über $[a,b)$. Für $a \in \mathbb{R} \cup -\infty$ und $b \in \mathbb{R} \cup +\infty$ wird das uneigentliche Integral für $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ mit beliebigem $c \in (a,b)$ erklärt:
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$$
B.6.4.2: Angenommen $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ ist strikt monoton fallend und auf jedem Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}_0^+$ Riemann-integrierbar. Dann gilt:
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$
Integrale komplexwertiger Funktionen lassen sich durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil erklären. Gilt $\Re(f), \Im(f) \in \mathcal{R}([a,b])$, so ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und es gilt:
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \Re(f(x))\,\mathrm{d}x + i\int_a^b \Im(f(x))\,\mathrm{d}x$$
L.6.4.3: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar, so ist:
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

7 Metrische Räume

7.1 Definition und Beispiele

Ein metrischer Raum (X,d) ist ein Paar aus einer Menge X und einer Abbildung (Metrik, Abstandsfunktion). $d : X \times X \to [0,\infty)$
(D1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Definitheit)
(D2) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie)
(D3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Δ- Ungleichung)
Offene ε-Kugel um den Punkt $x \in X$:
$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$
L.1.1.1 D3 ist äquivalent zur umgekehrten Dreiecksungleichung: (D3') $|d(x,z) - d(x,y)| \leq d(y,z)$
Beispiele 1.1.2
a) $d(x,y) = |x-y|$ b) (X,d) MR, $A \subseteq X \Rightarrow (A, d_{|A\times A})$ MR
c) Euklidische Metrik: $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}$
d) Normierte Metrik: $d(v,w) = \|v-w\|$ mit Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$
e) $d_\infty(x,y) = \max_{i=1}^n |x_i - y_i|$, $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$
Raum der beschränkten Funktionen:
$\mathcal{F}_b([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist beschränkt}\}$
f) **Supremumsmetrik**: $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$
$\to$ Konvergenz bezüglich dieser Metrik: Gleichmäßige Konvergenz.
Raum der stetig diffbaren Funktionen auf $[a,b]$: $C^1([a,b],\mathbb{R})$
g) $d_{C^1}(f,g) = \max\{\sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|, \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)-g'(x)|\}$
h) Sei Ω beliebige Menge und (X,d) ein metrischer Raum. $f : \Omega \to X$ ist **beschränkt**, falls: $\sup_{\omega,\omega'\in\Omega} d(f(\omega), f(\omega')) < \infty$
i) $d_s(a,b) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(1 - \delta_{a_n b_n})$ für $a,b \in A^{\mathbb{N}}$
Kronecker-Delta: $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \alpha \neq \beta \\ 1 & \alpha = \beta \end{cases}$ Ein Metrischer Raum (X,d) mit der Eigenschaft: $d(a,c) \leq \max\{d(a,b), d(b,c)\}$ $\forall a,b,c \in X$ heißt **ultrametrischer Raum**.
j) $d : \mathcal{R}([a,b]) \times \mathcal{R}([a,b]) \to \mathbb{R}$ $\quad d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x$
Hier ist keine Definitheit gegeben. Man kann jedoch eine Äquivalenzrleation einführen: $f \sim g \Leftrightarrow \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x = 0$
Auf $\mathcal{R}([a,b])/\sim$ wird nun durch $d([f],[g]) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x$ eine Metrik definiert.
k) Damit kann man auch auf dem Raum der quadratintegrierbaren Funktionen ($\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x < \infty$) eine Metrik definieren.
l) Ist X eine beliebige Menge und erfüllt $d : X \times X \to \mathbb{R}$ die Bedingungen (D2) und (D3), sowie $d(x,x) = 0$ für alle $x \in X$, so nennt man d eine **Pseudometrik** auf X. $x \sim y \Leftrightarrow d(x,y) = 0$ ist eine Äquivalenzrelation und $X/\sim$ wir mit $d_\sim([x],[y]) = d(x,y)$ zum metrischen Raum.
m) $l^1(\mathbb{N}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$ (Raum der absolut summierbaren Folgen) $\Rightarrow d(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$.
n) Auf dem Raum quadratsummierbarer reeller Folgen gilt dies analog.
o) Die Metriken lassen sich auf komplexwertige Fälle übertragen.
p) Diskrete (triviale) Metrik für jeden beliebigen Raum X.
$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$$

7.2 Konvergenz und weitere Grundbegriffe

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Die Folge konvergiert gegen einen Punkt $x \in X$, falls gilt:
$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} : d(x_n, x) < \varepsilon \forall; n \geq N$
x heißt dann Grenzwert oder Limes der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$
B.1.2.1 Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum (X,d) konvergiert genau dann gegen $x \in X$, falls zu jeder Umgebung U von X ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $x_n \in U$ für alle $n \geq N$ gilt.
B.1.2.3 Die Frage nach der Konvergenz hängt nicht nur von den betrachteten Folgen, sondern auch von der Metrik ab.
L.1.2.4 Grenzwerte von Folgen in metrischen Räumen sind eindeutig bestimmt.
B.1.2.5 Eine Teilmenge $U \subseteq X$ eines metrischen Raumes (X,d) heißt **offen**, falls gilt: $\forall\, x \in U \exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq U$
$A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, falls $A^C = X\backslash A$ offen ist.
S.1.2.6 Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A auch der Grenzwert $x = \lim_{n\to\infty}$ in A liegt.
B.1.2.7 Gilt $x \in U$ und ist U offen, so nennen wir U eine **offene Umgebung** von X. Allgemein heißt eine Menge $A \subseteq X$ Umgebung von $x \in X$, wenn A eine offene Umgebung des Punktes x enthält. Für genügend kleine $\varepsilon > 0$ gilt: $B_\varepsilon(x) \subseteq A$.
Inneres $\mathrm{int}(A) = A^o = \{x \in X \mid A \text{ ist Umgebung von } x\}$
Abschluss $\mathrm{cl}(A) = \bar{A} = \{x \in X \mid A^C \text{ ist nicht Umgebung von } x\}$
Rand $\partial A = \bar{A} \setminus A^o$
Eine Menge $A \subseteq X$ heißt **dicht** in X, falls $\bar{A} = X$ gilt und **nirgends dicht**, falls $(\bar{A})^o = \emptyset$
L.1.2.9 Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$.
a) Das Innere von A ist offen.
b) Der Abschluss von A ist abgeschlossen.
c) $A^o = \bigcup_{U\subseteq A, U \text{ offen}} U$
d) $\bar{A} = \bigcap_{F\supseteq A, F \text{ abgeschlossen}} F$
e) A ist offen $\Leftrightarrow A = A^o$
f) $(A^o)^C = \overline{(A^C)}$
g) $(\bar{A})^C = (A^C)^o$
h) $\partial(A^C) = \partial A$
Ein Punkt $x \in X$ heißt **Häufungspunkt** einer Menge $A \subseteq X$, falls $A\backslash\{x\}$ jede Umgebung von x schneidet. Ist $x \in A$ kein Häufungspunkt von A, so heißt x **isolierter Punkt** von A.
L.1.2.10 Sei (X,d) ein metrischer Raum. Ein Punkt $x \in A$ ist genau dann Häufungspunkt einer Menge $A \subseteq X$, falls eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $A\backslash\{x\}$ mit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ existiert. $x \in X$ heißt **Berührpunkt** der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls es zu jeder Umgebung U von x und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m \geq n$ mit $x_m \in U$ gibt.
B.1.2.11 Häufungspunkt $\Rightarrow$ Berührpunkt(wenn x

7.3 Stetigkeit

Seien (X,d_X) und (Y,d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt dann **stetig**, falls Urbilder offener Mengen in Y immer offene Mengen in X sind. Die Abbildung f heißt stetig im Punkt $x \in X$, falls das Urbild jeder Umgebung von $f(x)$ eine Umgebung von x enthält.
Ist f bijektiv und auch $f^{-1} : Y \to X$ stetig, so nennen wir f einen **Homöomorphismus** zwischen X und Y.
L.1.3.1 Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann ist folgendes äquivalent:
a) f ist stetig
b) $\forall\, x \in X$ und $\varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$
c) $\forall\, x \in X$ und $\varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 : d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$
d) Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$
L.1.3.2 Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann ist für jedes $y \in X$

die Funktion $x \mapsto d(x,y)$ stetig, das heißt aus $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ folgt $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y) = d(x,y)$
S.1.3.3 Seien (X,d_X) und (Y,d_Y) metrische Räume. Angenommen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge stetiger Funktionen $f_n : X \to Y$ und es gilt $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ bezüglich der Supremumsmetrik d_∞ auf $\mathcal{F}(X,Y)$. Dann ist der Grenzwert f ebenfalls stetig.
B.1.3.4 Die Familie der stetigen Funktionen $\mathcal{C}(X,Y)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge des metrischen Raumes $(\mathcal{F}(X,Y),d_\infty)$.
B.1.3.5 Eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen zwei metrischen Räumen heißt **gleichmäßig stetig**, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $d_X(x,y) < \delta$ immer $d_Y(f(x),f(y)) < \varepsilon$ folgt.
B.1.3.6 Die Abbildung f heißt **Lipschitz-stetig**, falls ein $L > 0$ existiert, sodass gilt: $d_Y(f(x,f(y)) \leq L \cdot d_X(x,y) \quad \forall\, x,y \in X$
Jede Lipschitz-stetige Abbildung ist auch gleichmäßig stetig, da zu $\varepsilon > 0$ immer $\delta = \varepsilon/L$ gewählt werden kann.

7.4 Vollständigkeit

eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X,d) heißt **Cauchy-Folge**, falls gilt: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N} : d(x_n,x_m) < \varepsilon \quad \forall\, n,m \geq N$
L.1.4.1 Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann ist jede konvergente Folge in X eine Cauchy-Folge.
Wir nennen einen metrischen Raum (X,d) **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge in X konvergiert. B.1.4.2 Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der üblichen Abstandsmetrik sind vollständig. Jeder euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ist vollständig.
S.1.4.3 Sei Ω eine beliebige Menge und (Y,d_y) ein metrischer Raum. Dann ist $(\mathcal{F}_b(\Omega,Y),d_\infty)$ genau dann vollständig, wenn (Y,d_y) vollständig ist.
L.1.4.4 Ist (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist auch (A,d) vollständig.
L.1.4.5 Angenommen (X,d_x) und (Y,d_y) sind metrische Räume. Dann ist $\mathcal{C}_b(X,Y) = \{f : X \to Y \mid f \text{ ist stetig und beschränkt.}\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $(\mathcal{F}_b(X,Y),d_\infty)$.
K.1.4.6 Sind (X,d_x) und (Y,d_y) metrische Räume und ist (Y,d_y) vollständig, so ist $\mathcal{C}_b(X,Y)$ vollständig.
Ist (X,d) ein metrischer Raum, so nennen wir $f : X \to X$ eine **Kontraktion**, falls es eine Konstante $\lambda \in [0,1)$ gibt, für die gilt: $d(f(x),f(y)) \leq \lambda \cdot d(x,y) \quad \forall x,y \in X$
Wir nennen x_f einen Fixpunkt für $f : X \to X$, falls gilt: $f(x_f) = x_f$
S.1.4.7 **Banachscher Fixpunktsatz**
Angenommen $f : X \to X$ ist eine Kontraktion mit KK λ auf einem vollständigen, metrischen Raum (X,d). Dann existiert genau ein Fixpunkt $x_f \in X$ von f in X, und für jedes $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $d(f^n(x),x_f) \leq \lambda^n d(x,x_f)$
Anwendung: Beweis der Existenz von Lösungen für Differentialgleichungen.
P.1.4.8 Sei $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$. Dann existiert zu jeder Anfangswertbedingung $x(t_0) = x_0$ eine Lösung der Differentialgleichung $x' = V(x)$

7.5 Der Satz von Baire

Eine Teilmenge eines metrischen Raumes heißt **dicht**, falls ihr Abschluss der gesamte Raum ist. Sie heißt **nirgends dicht**, wenn ihr Abschluss keine offene Menge enthält. Die Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener, nirgends dichter Mengen heißt **magere Menge** oder **Menge 1. Kategorie**. Eine Menge, die Schnitt abzählbar vieler dichter offener Mengen ist, heißt **residuelle Menge** oder **Menge 2. Kategorie**.
Bemerkung 1.5.1
a) Eine Menge ist genau dann dicht, wenn sie jede ε-Kugel schneidet. Sie ist genau dann nirgends dicht, wenn ihr Abschluss keine offene Kugel enthält.
b) Ist A eine abgeschlossene und nirgends dichte Menge, so muss wegen $\bar{A} = A$ das Komplement A^C jede offene Kugel schneiden. Also ist A^C eine offene und dichte Menge.
c) Das Komplement einer offenen und dichten Menge ist eine abgeschlossene und nirgends dichte Menge.
c) Seien O und U offen und dicht. Dann enthält jede Kugel $B_\varepsilon(x)$ eine in O enthaltene kleinere Kugel $B_\delta(y)$. Diese wiederum enthält eine noch kleinere Kugel $B_\gamma(z) \subseteq U \cap O$. Also ist $O \cap U$ ebenfalls offen und dicht.
Beispiele 1.5.2
a) Jede endliche Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist abgeschlossen und nirgends dicht und daher mager.
b) Jede abzählbare Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist Vereinigung abzählbarer einelementiger Mengen und daher mager. Damit ist $\mathbb{Q}$ mager.
c) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ist residuell.
L.1.5.3 Eine Teilmenge eines metrischen Raumes (X,d) ist genau dann residuell, wenn ihr Komplement mager ist.
L.1.5.4 Der Schnitt zweier residueller Mengen ist wieder residuell.
K.1.5.5 Eine Menge kann nicht gleichzeitig residuell und mager sein.
S.1.5.6 Satz von Baire
Ist (X,d) ein vollständiger metrischer Raum, so liegt jede residuelle Menge dicht in X.
K.1.5.7 Ist (X,d) ein vollständiger metrischer Raum, so hat jede magere Menge M leeres Inneres. Insbesondere ist $M \neq X$.
B.1.5.8 Liouvillesche und Diophantische Zahlen
Zu $n,k,q \in \mathbb{N}$ sei $\varepsilon(n,k,q) = \frac{1}{n\cdot q^k}$. Dann ist für jedes Paar $n,k \in \mathbb{N}$

$$L_{n,k} = [0,1] \cap \bigcup_{p/q\,\in\,\mathbb{Q}\,\cap\,[0,1]} B_{\varepsilon(n,kq)}\frac{p}{q}$$

offen und dicht. Für die 'Länge' von $L_{n,k}$ für $k \geq 3$ gilt die Abschätzung

$$\text{Länge}(L_{n,k}) \leq \sum_{q=1}^{\infty} \frac{2(q+1)}{n\cdot q^k} < \infty \qquad \mathcal{L} = \bigcap_{n,k\in\mathbb{N}} L_{n,k}$$

Zahlen aus $\mathcal{L}\backslash\mathbb{Q}$ werden **Liouvillesche Zahlen** genannt. Diese sind irrationale Zahlen, welche gut durch rationale Zahlen approximierbar sind.
Zahlen aus $[0,1]\backslash(\mathcal{L}\cup\mathbb{Q})$ werden **Diophantische Zahlen** genannt und sind 'besonders irrational' (Beispiel: goldener Schnitt)
B.1.5.10 Cantormengen
Sei $X = 0,1,2^{\mathbb{N}}$ und $\varphi : X \to [0,1], a \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}$
φ bildet den Folgenraum X surjektiv und stetig auf $[0,1]$ ab. Sei $A = 0,2^{\mathbb{N}}$ und $C = \varphi(A)$. Dann heißt C die **Mittelsegment-Cantormenge**.
Allgemein gilt für Cantormengen: Sie sind kompakt, nirgends dicht überabzählbar und jeder Punkt der Menge ist ein Häufungspunkt.

7.6 Kompaktheit

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ offener Mengen mit beliebiger Indexmenge I heißt **offene Überdeckung** von A, falls gilt $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Die Überdeckung heißt **endlich**, falls I endlich ist. Die Menge A heißt **kompakt**, falls es zu jeder offenen Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung gibt. A heißt **folgenkompakt**, falls jede Folge in A eine konvergente Teilfolge besitzt. Schließlich nennen wir A **relativkompakt**, wenn $\bar{A}$ kompakt ist.
S.1.6.1 Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann ist die Menge A genau dann kompakt, wenn sie folgenkompakt ist.
L.1.6.2 Eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist auch vollständig.
L.1.6.3
a) Abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen sind kompakt.
b) Kompakte Teilmengen metrischer Räume sind abgeschlossen.
Ein metrischer Raum (X,d) heißt **präkompakt**, falls es für alle $\varepsilon > 0$ endlich viele Elemente $x_1,\ldots,x_n$ gibt, sodass gilt: $X = \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$
T.1.6.4 Theorem von Heine-Borel
Ein metrischer Raum (X,d) ist genau dann kompakt, wenn er präkompakt und vollständig ist.
K.1.6.5 Jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.
Eine Familie von Mengen $(A_i)_{i\in I}$ hat die **endliche Durchschnittseigenschaft**, falls für jede endliche Menge $I' \subseteq I$ gilt: $\cap_{i\in I'} A_i \neq \emptyset$.
L.1.6.6 Cantor'scher Durchschnittssatz
Ist $(X,\mathcal{O})$ ein kompakter topologischer Raum und $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X, welche die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt, so gilt $\bigcap_{i\in I} A_I \neq \emptyset$.

Man nennt einen metrischen Raum (X, d) **separabel**, falls er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.
B.1.6.8 Jeder euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ist separabel, denn er besitzt die abzählbare dichte Teilmenge $\mathbb{Q}^n$.
L.1.6.9 Jeder kompakte metrische Raum (X, d) ist separabel.
L.1.6.10 Bilder kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen sind kompakt.
S.1.6.11 Sei (X, d) MR und $A \subseteq X$. Dann ist äquivalent:
a) A ist kompakt.
b) jede stetige Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ nimmt auf A ihr Maximum (oder Minimum) an.
c) jede stetige Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ ist beschränkt.
Ist eine stetige Abbildung invertierbar, muss die Umkehrfunktion i.A. nicht stetig sein.

L.1.6.13 Homöomorphie-Kriterium
Eine stetige Bijektion von einem kompakten metrischen Raum (X, d) in einen metrischen Raum (Y, d) ist stets ein Homöomophismus.
L.1.6.14 Sind X, Y metrische Räume, $f : X \to Y$ stetig und $A \subseteq X$, so gilt $f(\bar{A}) = f(A)$
L.1.6.15 Stetige Funktionen auf kompakten metrischen Räumen sind immer gleichmäßig stetig.

7.7 Der Satz von Arzela-Ascoli

Der Satz von Arzela-Ascoli liefert ein Kriterium für die Existenz gleichmäßig konvergenter Teilfolgen von Funktionenfolgen.
Sind (X, d_x), Y, d_y metrische Räume, so heißt eine Familie von Funktionen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ **gleichgradig stetig**, falls es für jedes $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $B_\delta(x)$ von x gibt, sodass gilt:
$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \quad \forall f \in \mathcal{F}$.
B.1.1.1 Ist eine Funktionenfamilie $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig, so auch ihr Abschluss $\bar{\mathcal{F}}$ bezüglich der Supremumsmetrik.
T.1.1.2 **Theorem von Arzela-Ascoli**
Seien (X, d_x), (Y, d_y) metrische Räume und X kompakt. Dann ist eine Familie von Funktionen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ genau dann relativ-kompakt, wenn $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig und $\mathcal{F}(x) := \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$ für jedes $x \in X$ relativ-kompakt ist.
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y = \mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}^d$. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}(X, Y)$ heißt **(punktweise) gleichgradig beschränkt**, falls für alle $x \in X$ die Menge $\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$beschränkt ist.
K.1.1.3 Jede gleichgradig stetige und gleichgradig beschränkte Folge reelller oder komplexer Funktionen auf einem kompakten Raum hat eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

7.8 Zusammenhang

Sei (X, d) MR. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **zusammenhängend**, falls für jedes Paar disjunkter offener Mengen $U, V \subseteq X$ gilt:
$A \subseteq U \cup V \;\Rightarrow\; U \cap A = \emptyset$ oder $V \cap A = \emptyset$
L.1.8.1 Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend $\Leftrightarrow$ A ist ein (unbeschränktes) Intervall.
Vereinigungen nicht umbedingt zusammenhängend falls $A \cap B = \emptyset$. Schneiden sie sich, ist der Zusammenhang immer gegeben.
L.1.8.2 Angenommen A und B sind zusammenhängende Teilmengen eines MR (X, d) und $A \cap B \neq \emptyset$. Dann ist $A \cup B$ zusammenhängend. Durchschnitte müssen nicht zusammenhängend sein.
L.1.8.3 Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge kompakter und zusammenhängender Mengen. Dann ist $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls zusammenhängend.
L.1.8.4 Stetige Bilder zusammenhängender Intervalle sind zusammenhängend.
S.1.8.5 Sei (X, d) MR und $A \subseteq X$. Dann wird durch:
$x \sim y :\Leftrightarrow \exists$ zusammenhängende Menge $C \subseteq A$ mit $x, y \in C$
eine Äquivalenzrelation auf A definiert. Die Äquivalenzklassen heißen **Zusammenhangskomponenten**.
B.1.8.6 Eine Teilmenge A eines MR heißt **wegzusammenhängend**, falls es zu beliebigen Punkten $x, y \in A$ eine stetige Funktion $\gamma : [0, 1] \to A$ gibt, die $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ erfüllt (stetiger Pfad von x nach y).
Zusammenhang impliziert nicht Wegzusammenhang:
$A = \{(x, sin(\frac{1}{x})) \mid x \in (0, 1]\} \cup (\{0\} \times [-1, 1])$
Für offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind Zusammenhang und Wegzusammenhang äquivalent.

7.9 Bem. zu MR und top. Räumen

7.9.1 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Seien $(X, d_x), (Y, d_y)$ MR. Eine Folge von Funktionen $f_n : X \to Y$ heißt punktweise konvergent gegen $f : X \to Y$, falls gilt:
$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in X$.
Gleichmäßige Konvergenz: $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N \in \mathbb{N}\; \forall\, x \in X\; \forall\, n \geq N :$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
B.1.9.1 a) Punktweise Grenzwerte sind eindeutig bestimmt.
b) Konv. eine Funktionenfolge gleichmäßig, dann auch punktweise.
B.1.9.3 Stetigkeit bleibt unter punktweise Konvergenz nicht immer erhalten.

7.9.2 Topologische Räume

Konvergenz: eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $x \in X \Leftrightarrow$ es gibt zu jeder offenen Umgebung U von x ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \in U$ für alle $n \geq N$ gilt.
Sei X eine beliebige Menge. Eine Mengenfamilie $\mathcal{O} \subseteq X$ heißt **Topologie**, falls sie folgendes erfüllt:
O1 $\emptyset \in \mathcal{O}, X \in \mathcal{O}$
O2 $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \in \mathcal{O}$
O3 $U_i \in \mathcal{O}\; \forall\, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$
I ist eine beliebige (überabzählbare) Indexmenge. Das Paar $(X, \mathcal{O})$ heißt **topologischer Raum**, die Mengen aus $\mathcal{O}$ werden als **offene Mengen** bzeichnet.
B.1.9.6
a) Ist (X, d) MR und $\mathcal{O}$ die aus den offenen Teilmengen von X gebildete Topologie, so ist die Menge:
$\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0, x \in X\}$ eine Basis von $\mathcal{O}$.
b) Ein topologischer Raum X heißt **separabel**, falls eine abzählbare dichte Teilmenge $D \subseteq X$ existiert.
$\mathcal{B} = \{B_{1/n}(x) \mid n \in \mathbb{N}, x \in D\}$ ist eine abzählbare Basis.
Hat ein topologischer Raum eine abzählbare Basis, so erfüllt er das **2. Abzählbarkeitsaxiom**.
c) Angenommen X bel. Raum und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}$ sei eine durchschnittsstabile Mengenfamilie, die X und $\emptyset$ enthält. Dann ist $\mathcal{B}$ eine Basis der Topoliogie, die aus allen Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{B}$ besteht. Sie wird als die von $\mathcal{B}$ **erzeugte Topologie** bezeichnet.

7.9.3 Vervollständigung metrischer Räume

Ist ein metrischer Raum (X, d) nicht vollständig, so lässt er sich immer vervollständigen. Es existiert somit ein vollständiger MR $(\hat{X}, \hat{d})$ und eine injektive Abbildung $i : X \to \hat{X}$, sodass gilt:
$\forall x, y \in X : \hat{d}(i(x), i(y)) = d(x, y)$
Der Raum X wird in $\hat{X}$ **isometrisch eingebettet**. Er lässt sich als Teilmenge des Raumes $\hat{X}$ auffassen.
Konstruktion von $\hat{X}$: $\tilde{X}$ Raum aller Cauchy-Folgen in X:
Äquivalenzrelation: $(x_n)_{n\in\mathbb{N})} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N})} :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$.
$\hat{X}$ ist dann der Quotientenraum: $\hat{X} = \tilde{X}/\sim$

7.9.4 Hausdorff-Metrik

Ist (X, d) MR, so bezeichnen wir mit $\mathcal{K}(X) = \{K \subseteq X \mid K$ ist kompakt$\}$ die Menge aller kompakten Teilmengen von X. Zudem sei für $A \subseteq X$ die ε- Umgebung um A gegeben durch:
$B_\varepsilon(A) = \bigcup_{x\in A} B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid \exists\, x \in A : d(x, y) < \varepsilon\}$
Auf $\mathcal{K}(X)$ wird die **Hausdorff-Metrik** definiert:
$d_{\mathcal{H}}(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subseteq B_\varepsilon(B) \wedge B \subseteq B_\varepsilon(A)\}$
S.1.9.7 Ein MR (X, d) ist kompakt $\Leftrightarrow$ $(\mathcal{K}(X), d_{\mathcal{H}})$ kompakt

8 Konvergenz von Funktionenfolgen und Potenzreihen

8.2 Vertauschbarkeit von Grenzwerten

S.2.2.1 Angenommen $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ist ein kompaktes Intervall und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge Riemann-integrierbarer Funktionen, gleichmäßig konvergent gegen $f : I \to \mathbb{R}$. Dann ist f Riemann-integrierbar: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$
K.2.2.2 Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ kompaktes Intervall und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge diffbarer Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$. Angenommen f'_n Riemann-intbar und gleichmäßig konvergent gegen $g : I \to \mathbb{R}$ und für bel. $x_0 \in I$ existiert $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = y_0$:
Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f : I \to \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = y_0$ und es gilt auf ganz $I : f' = g$.

8.3 Parameterabhäng. Integrale, Faltungen

L.2.3.1 Angenommen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ kompakte Intervalle und $F : I \times J \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $t \in I$ ein Paramter und $f_t : J \to \mathbb{R}, x \mapsto F(t, x)$. Für bel. $t \in I$ gilt dann: $\lim_{t'\to t} \int_J f_{t'}(x)\mathrm{d}x = \int_J f_t(x)\mathrm{d}x$
S.2.3.3 Angenommen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ sind kompakte Intervalle und $F : I \times J \to \mathbb{R}$ stetig und für jedes feste $x \in J$ die Funktion $t \mapsto F(t, x)$ stetig diffbar. Zudem sei $\delta_t F(t, x)$ stetig. Dann ist $\int_J F(t, x)\mathrm{d}x$ diffbar:
$\delta_t \int_J F(t, x)\mathrm{d}x = \int_J \delta_t F(t, x)\mathrm{d}x$
Funktionen mit kompaktem Träger: Funktionen, die außerhalb eines kompakten Intervalls I Null sind. I wird als Träger bezeichnet. Die Funktion:
$f * g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot g(t - x)\mathrm{d}x$ heißt **Faltung** der Funktionen.
S.2.3.5 Sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit kompaktem Träger und g stetig diffbar: $\delta_t f * g(t) = f * (\delta_t g)(t)$.
S.2.3.7 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ kompaktes Intervall und $C^\infty(I, \mathbb{R})$ Raum beliebig oft stetig diffbarer Funktionen auf I. Dann liegt $C^\infty(I, \mathbb{R})$ im MR $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}), d_\infty)$ dicht.

8.4 Potenzreihen

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von Funktionen $g_n : M \to \mathbb{R}$. Dann wird auf $A = \{x \in I \mid \sum g_n(x) \text{ konvergiert}\}$ eine Funktion $f = \sum_{n=0}^\infty g_n$ definiert, **Funktionenreihe** genannt. A ist Defin.bereich der Funktionenreihe. $\sum g_n$ konvergiert punktweise/gleichmäßig, auf $M \subseteq \mathbb{R}$, falls Folge der Partialsummen $f_n = \sum_{j=0}^n g_j$ auf M punktweise/gleichmäßig gegen f konvergiert.
L.2.4.1 Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $(g_n)_{n\in N}$ Folge von Funktionen $g_n : M \to \mathbb{R}$ und $a_n = \sup_{x\in M} |g_n(x)|$. Gilt dann $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n < \infty$, so konvergiert $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ gleichmäßig auf M gegen $f : x \mapsto \sum_{n=0}^\infty g_n(x)$.
Eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^\infty a_n(x - x_0)^n$ wird als **Potenzreihe** im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ mit **Entwicklungspunkt** $x_0 \in \mathbb{R}$ bezeichnet.
Konvergenzradius: $\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \liminf \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$
$B_\rho(x_0)$ heißt maximales **Konvergenzintervall** der Reihe.
B.2.4.2
a) Eine Potenzreihe wird durch $x_0 \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt. Konvergenzradius nur von Koeffizienten der Potenzreihe abhängig.
S.2.4.4 Sei $\rho > 0$ Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^\infty$:
a) Die Reihe konvergiert $\forall\ x \in B_\rho(x)$ punktweise und auf $A \subseteq B_\rho(x), A$ kompakt gleichmäßig.
b) Die Reihe divergiert $\forall\ x \notin \overline{b_\rho(x)}$
S.2.4.6 Eine Potenzreihe f mit $\rho > 0$ ist auf $B_\rho(x)$ beliebig oft diffbar mit Ableitung: $f'(x) = \sum_{n=0}^\infty (n + 1)a_{n+1}(x - x_0)^n$
K.2.4.7 Ist $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x - x_0)^n$ Potenzreihe mit $\rho > 0$, so gilt: $f^{(n)}(x_0) = a_n n!$.
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f : I \to \mathbb{R}$ beliebig oft diffbar:
$\sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$ Taylorreihe.
Ist f eine Potenzreihe, stimmt sie auf dem Konvergenzintervall mit ihrer Talorreihe überein.
S.2.4.9 $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x - x_0)$ mit $\rho > 0$. $\forall\ x_1 \in B_\rho(x_0)$ lässt sich f in eine Potenzreihe der Form: $f(x) = \sum_{n=0}^\infty b_k(x - x_1)^k$ mit Koeffizienten $b_k = \sum_{n=k}^\infty \binom{n}{k} a_n(x_1 - x_0)^{n-k}$ und Konvergenzradius $\tilde{\rho} \geq \rho|x_1 - x_0|$ entwickeln.

8.5 Der Satz von Stone-Weierstrass

S.2.5.1 Satz von Weierstrass
$\mathcal{P}(I) = \{P : I \to \mathbb{R} \mid P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x\}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, a_k reell.
$\Rightarrow \mathcal{P}(I)$ liegt dicht in $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}), d_\infty)$ Es gibt zu jeder stetigen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ eine Folge von Polynomen $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass $\lim_{n\to\infty} P_n = f$ gleichmäßig auf I konvergiert.
B.2.5.2 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ heißt **Funktionenalgebra**, falls $\forall f, g \in \mathcal{A}$:
(A1) $f + g \in \mathcal{A}$
(A2) $f \cdot g \in \mathcal{A}$
(A3) $c \cdot f \in \mathcal{A}, c \in \mathbb{R}$
$\mathcal{A}$ ist **separierend**, falls für alle Paare $x \neq y \in X\ \exists\ f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq f(y))$ $\mathcal{A}$ **verschwindet in keinem Punkt**, falls $\forall x \in X\ \exists\ f \in \mathcal{A} : f(x) \neq 0$. Der Abschluss von $\mathcal{A}$ in $(\mathcal{F}(X, \mathbb{R}), d_\infty)$ heißt gleichmäßig **abgeschlossene Hülle**.
S.2.5.3 Satz von Stone-Weierstrass
X kompakter MR. $\mathcal{A}$ reelle Algebra auf X, separierend und nirgends verschwindend. Dann ist die abgeschlossene Hülle von $\mathcal{A}$ gleich $\mathcal{X}, \mathbb{R}$.

9 Mehrdim. Differential- und Integralrechnung

9.1 Differentiation reeller Funktionen mehrerer Variablen

Sei $\|.\|$ Euklidische Norm. $L(V, w)$ Menge der linearen Funktionen zwischen VR v, W. $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$.
f heißt im Punkt $x_0 \in U$ **differenzierbar**, falls lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existiert mit: $\lim_{x\to x_0} \frac{\|f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} = 0$
A heißt **Ableitung** von f: $A = Df(x_0)$ oder $A = Df_{|x_0}$
B.3.1.1 Ist f in x_0 diffbar, so ist f in x_0 auch stetig.
Ist f in jedem Punkt $x_0 \in U$ diffbar, so heißt f **auf** U **differenzierbar**. $\mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), x \mapsto Df(x)$ heißt **Ableitung von** f **auf** U.
B.3.1.2 $DA(x_0) = A$, $D(DA) = 0$
L.3.1.3 Ist f in $x_0 \in U$ diffbar, so ist A eindeutig bestimmt.
B.3.1.5 $D_{|x_0}$ definiert in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ eine **affine Hyperebene** $Tf(x_0) = (x_0, f(x_0)) + \{(x, df_{x_0} \cdot x) \mid x \in \mathbb{R}^n\} = (x_0, f(x_0)) + Id_{\mathbb{R}^n} \times Df_{|x_0}(\mathbb{R}^n)$ mit $Id_{\mathbb{R}^n} \times Df_{|x_0} : x \mapsto (x, df_{x_0} \cdot x)$.
Operatornorm: $|||A||| = \sup\{\|A(v)\|_W \mid v \in V : \|v\|_V \leq 1\}$
Ist $|||A||| < \infty$, so ist A ein **beschränkter linearer Operator**.
$\forall v \in V\backslash\{0\} : \|A(v)\|_W = \left\|A(\frac{v}{\|v\|_V})\right\|_W \cdot \|v\|_V \leq |||A||| \cdot \|v\|_V$
L.3.1.6 W normierter VR. $A : \mathbb{R}^n \to W$ linear: $|||A||| < \infty$
S.3.1.7 Mehrdimensionale Kettenregel
$f : U \to \mathbb{R}^m, g : V \to \mathbb{R}^k$, sowie $x_0 \in U$ und $f(x_0) \in V$. Ist f in x_0 diffbar und g in $f(x_0)$ diffbar, so ist $g \circ f$ in x_0 diffbar und es gilt: $D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \cdot Df(x_0)$.
Sei $\pi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ Projektion auf die i-te Koordinate. $\Rightarrow f = (f_1, \ldots, f_m)^T$ mit **Koordinatenfunktionen** $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : f_i = \pi_i \circ f$
L.3.1.8 Sei $f = (f_1, \ldots, f_m)^T : U \to \mathbb{R}^m$. f in $x_0 \in U$ diffbar $\Leftrightarrow$ alle Koordinatenfunktionen $f_i, i = 1, \ldots, m$ in x_0 diffbar
Es gilt dann: $Df(x_0) = (Df_1(x_0), \ldots, Df_m(x_0))^T$
L.3.1.9 Sei $f_{x_0,v} : I \to \mathbb{R}^m, t \mapsto f(x_0 + t \cdot v)$. $f_{x_0,v}$ diffbar $\Leftrightarrow f$ in x_0 diffbar. Es gilt dann: $Df_{x_0,v}(0) = Df(x_0) \cdot v$.
$Df_{x_0,v}$ wird **Richtungsableitung** von f in x_0 genannt.
Die Richtungsableitung $D_{e_j} f_i(x_0)$ wird j-te **partielle Ableitung** von f_i im Punkt x_0 genannt. Notation: $\partial_{x_j} f_i(x_0)$
L.3.1.11 Ist f in x_0 diffbar, existieren alle partiellen Ableitungen $\partial_{x_i} f_j(x_0)$ und es gilt: $\partial_{x_j} j_i(x_0) = Df(x_0)_{ij}$
L.3.1.12 Angenommen f existiert für jedes $x \in U$ und $\partial_{x_j} f_i(x)$ ist als Funktion stetit. Dann ist f auf ganz U diffbar und es gilt: $\partial_{x_j} j_i(x_0) = Df(x_0)_{ij}$
B.3.1.14
a) $|||AB||| \leq |||A||| \cdot |||B|||$
b) Sei $v \in \mathbb{R}^n$ und $f(x) = \langle v, x\rangle = v^T \cdot x$. Dann gilt: $Df(x) = v^T \in M^{1\times n}(\mathbb{R})\, \forall\, x \in \mathbb{R}^n$
c) Sei $f(t) = x_0 + t \cdot v$, so gilt $Df(t) = v\ \forall\ t \in \mathbb{R}$
d) $U \subseteq \mathbb{R}$ heißt **konvex**, falls für $x, y \in U$ und jedes $t \in [0, 1]$ gilt,

dass $t \cdot x + (1-t)y \in U$. ε-Kugeln sind offensichtlich konvex.
S.3.1.15 Angenommen U offen und konvex und f auf ganz U diffbar. Gilt für $M > 0$ und alle $x \in U$ $|||Df(x)||| < M$ folgt für alle $x, y \in U$: $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\| \Rightarrow f$ ist Lipschitz-stetig.

9.2 Höhere part. Ableit. und Taylorentw.

Ist f auf ganz U stetig diffbar, so ist $Df : \mathbb{R}^n \to M^{1\times n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ wieder stetig. Ist sie ebenfalls diffbar, gilt: $\partial_{x_i}\partial_{x_j} f(x)$ ist die i-te partielle Ableitung von $(Df)_j = \partial_{x_j} f$ in x. Dies heißt **partielle Ableitung zweiter Ordnung**.
Hesse-Matrix: $Hf(x) = D^2 f(x) = (\partial_{x_i}\partial_{x_j} f(x))_{ij} \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$
S.3.2.2 Sei U offen und f zweimal stetig diffbar. Dann gilt:
$\partial_{x_i}\partial_{x_j} f(x) = \partial_{x_j}\partial_{x_i} f(x)$
Noationen: $|\alpha| = \sum_{j=1}^n a_j$ und $\alpha! = \prod_{j=1}^n a_j!$ und $\xi^\alpha = \prod_{j=1}^n \xi_j^{\alpha_j}$
Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$: $D^\alpha f(x) = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f(x)$
L.3.2.3 Sei f k-mal stetig diffbar. Dann ist $f_{x_0,v}$ k-mal stetig diffbar und für $l = 1, \dots, k$ gilt:
$f_{x_0,v}^{(l)}(t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| = l} \frac{l!}{\alpha!} \cdot D^\alpha f(x_0 + t \cdot v) \cdot v^\alpha$
Satz 3.2.6 Mehrdimensionale Taylor-Approximation
Sei f k-mal stetig diffbar und $B_\delta(x) \subseteq U$. Dann existiert $\forall x \in B_\delta(x_0)$ ein $t = t(x_0, x) \in [0,1]$ mit:
$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| = l} \frac{|\alpha!|}{\alpha!} \cdot D\alpha f(x) \cdot (x - x_0)^\alpha$
$+ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| = l} \frac{k!}{\alpha!} \cdot (D^\alpha f(x_0 + t \cdot (x - x_0)) - D^\alpha f(x)) \cdot (x - x_0)\alpha$

9.3 Bestimmung lokaler Extrema

blueL.3.3.1 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 2-mal stetig diffbar, $B_\delta(x_0) \subseteq U$.
Auf $B_\delta(x_0) : f(x) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}\langle x - x_0, Hf(x_0) \cdot (x - x_0)\rangle + o(\|x - x_0\|^2)$
B.3.3.2 Hf def. eine symm. Bilinearform: $Hf(x)_{i,j} = Hf(x)_{j,i}$
f hat **lokales Minimum**, falls es Umgeb. $V \subseteq U$ gibt: $f(y) \geq f(x)\ \forall y \in V$. (bei $>$ heißt das Minimum **strikt** oder **eindeutig**.)
blueS.3.3.3 f in x_0 diffbar mit lokalem Extremum $\Rightarrow Df(x_0) = 0$
blueS.3.3.4 f 2-mal stetig diffbar. $Df(x_0) = 0, Hf(x_0)$ positiv/EW > 0 (negativ/EW < 0) definit. $\Rightarrow f$ hat lokales Minimum (Maximum). Eigenwerte λ berechnen: $\det(\lambda \cdot E_n - Hf) = 0$

9.4 Implizite Funktionen und Umkehrfunktionen

$f : V \times W \to \mathbb{R}^m, (x, y) \mapsto f(x, y)$. Ist f diffbar, bezeichnen wir die Ableitung der Funktion $x \mapsto f(x, y_0)$ im Punkt $x_0 \in W$ mit:
$D_x f(x_0, y_0) = (\partial_{x_1} f(x_0, y_0) \dots \partial_{x_k} f(x_0, y_0)) = (\partial_{x_j} f_i(x_0, y_0))_{j=1,k}^{i=1,m}$
Analog wird die Abeleitung von $y \mapsto f(x_0, y)$ in $y = y_0$ mit $D_y f(x_0, y_0)$ bezeichnet.
Es gilt dann: $Df(x_0, y_0) = (D_x f(x_0, y_0)\, D_y f(x_0, y_0))$
$u = (v, w) \in \mathbb{R}^{k+m} v \in \mathbb{R}^k, w \in \mathbb{R}^m$:
$Df(x_0, y_0) \cdot u = D_x f(x_0, y_0) \cdot v + D_y f(x_0, y_0) \cdot w$
Implizite Funktion: $g : V \to w$ löst die Gleichung $f(x, g(x)) = 0$
S.3.4.2 **Implizite Funktionen**
$V \subseteq \mathbb{R}^k, W \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. $f : V \times W \to \mathbb{R}^m$ stetig diffbar, $f(x_0, y_0) = 0$ und die matrix $D_y f(x_0, y_0)$ ist invertierbar (Det. $\neq 0$).
Dann $\exists \delta, \varepsilon$ und eine Abbildung $g : B_\delta(x_0) \to B_\varepsilon(y_0)$ mit $g(x_0) = y_0$, sodass gilt:
1.) Die Funktion g erfüllt die implizite Gleichung $\forall x \in B_\delta(x_0)$
2.) g ist auf $B_\delta(x_0)$ stetig diffbar und es gilt:
$Dg(x)0 - D_y f(x, g(x))^{-1} \cdot D_x f(x, g(x))$
3.) g ist eindeutig: $(x, y) \in B_\delta(x_0) \times B_\varepsilon(y_0) : f(x, y) = 0 \Rightarrow y = g(x)$
Diffeomorphismus: $f : U \to V$ ist stetig diffbar und f^{-1} ist ebenfalls stetig diffbar.
S.3.4.3 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $x \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ diffbar: $\exists \delta > 0$ für das die Abbildung ein Diffeomorphismus ist. Zudem gilt $\forall y \in f(B_\delta(x_0))$: $Df^{-1}(y) = Df(f^{-1}(y))^{-1}$ Die Ableitungsmatrix von $f^- - 1$ im Punkt y ist gleich der Inversen Ableitungsmatrix von f im Punkt $f^{-1}(y)$.

9.5 Mehrdimensionale Integration

Sei $C > 0, K = [a, b]^n$ und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann hängt aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von f das Integral $\int_R f(x_1, \dots, x_n)\mathrm{d}x_1)$ stetig von $(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ ab. die erlaubt es, das Integral von f über K mittels sukzessivem Intergrieren durch
$\int_K f(x)\mathrm{d}x 0 \int_a^b \dots \int_a^b f(x_1, \dots, x_n)\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n$ zu definieren.
L.3.5.2 Angenommen $f_n : [a, b]^n \to \mathbb{R}$ stetiger funktionen konvergiert gleichmäßig gegen $f : [a, b]^n \to \mathbb{R}$. Dann gilt:
$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]^n} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]^n} f(x)\mathrm{d}x$
S.3.5.3 Sei $f.[a, b]^n \to \mathbb{R}$ stetig und $\sigma\{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ eine beliebige Permutation. Dann gilt:
$\int_a^b \dots \int_a^b f(x_1, \dots, x_n)\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_n$
$= \int_a^b \dots \int_a^b f(x_1, \dots, x_n)\mathrm{d}x_{\sigma(n)}, \dots, \mathrm{d}x_{\sigma(n)}$
S.3.5.4 Substitutionsregel
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $T : U \to \mathbb{R}^n$ ist injektiv und es gilt $\det(DT(x)) \neq 0\ \forall x \in U$. Ist dann $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger $K \subseteq T(U)$, so gilt:
$\int_{T(K)} f(x)\mathrm{d}x 0 \int_K f(T(x)) \cdots |\det(DT(x))|\mathrm{d}x$

10 Gewöhnliche DGLs

10.1 Grundbegriffe

eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung im $\mathbb{R}^d$ wird durch eine Funktion $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ gegeben und üblicherweise in der Form $x' = V(t, x)$ geschrieben. V ist ein stetiges Vektorfeld.
Autonome DGL: Vektorfeld hängt nicht von t ab: $x' = V(x)$
Anfangswerte der DGL: $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$
Lösung der DGL mit Anfangswertbedingung (AWB) $x(t_0) = x_0$ ist eine diffbare Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ welche die AWB und $x'(t) = V(t, x(t))\ \forall t \in \mathbb{R}$ erfüllt.
Gilt die Funktion nur auf einem Intervall (a, b) mit $t \in (a, b)$, so heißt x eine Lösung auf dem Lösungsintervall (a, b).
Integralgleichung: $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t V(s, x(s))\mathrm{d}s$
DGL n-ter Ordnung im $\mathbb{R}^d : x^{(n)} = V(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$
Anfangswerte: $(t_0, x_0, x_0', \dots, x_0^{(n-1)}) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^d)^n$
Jede gewöhnliche DGL n-ter Ordnung lässt sich auf eine DGL erster Ordnung auf $\mathbb{R}^{n\cdot d}$ umformen:
$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ Lösung der DGL $\Leftrightarrow X(t) = (x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$
Lösung der DGL: $X'(t) = \hat{V}(t, X)$ mit

$$\hat{V} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\cdot d} \quad , \quad (t, X) \mapsto \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \\ V(t, X_1, \dots, X_n) \end{pmatrix}$$

B.1.1.2 a) Alle Aussagen sind auf komplexe gewöhnliche DGLs übertragbar.
b) Ist V reell und $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ komplexwertige Lösung $\Rightarrow t \mapsto \Re(x(t))$ und $t \mapsto \Im(x(t))$ sind ebenfalls Lösungen.

10.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lsg.

$V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ global Lipschitz-stetig in x, falls eine Lipschitz-Konstante $L > 0$ existiert, sodass $\forall\, t \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt:
$\|V(t, x) - V(t, y) \leq L \cdot \|x - y\|$
S.1.2.1 **Satz von Picard-Lindelöf**
$V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to R^d$ Lipschitz-stetig in x. Dann existiert zu jeder AWB eine Lsg. der DGL.
S.1.2.2 **Banachscher Fixpunktsatz**
$f : X \to X$ Kontraktion mit KK λ auf vollständigen MR (X, d). Dann $\exists!$ Fixpunkt $x_f \in X$ von f und es gilt $\forall x \in X, n \in \mathbb{N}$:
$\mathrm{d}(f^n(x), x_f) \leq \lambda^n \mathrm{d}(x, x_f)$
B.1.2.3 Die Existenz lokaler Lösung gewöhnlicher DGLs folgt nach Satz von Peano aus der Stetigkeit des Vektorfeldes V. Die Eindeutigkeit ist jedoch nicht immer gewährleistet.

10.3 Exponentialfunktion für Matrizen

$M^{d\times d}(\mathbb{C})$ wird mit der Operatornorm $|||A||| = \max\{\|A\cdot v\| \mid v \in \mathbb{C}^d, \|v\| = 1\}$ zum vollständigen MR.
Man definiere: $\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ Exponentialmatrix A
S.1.3.1 Seien $A, B \in M^{d\times d}(\mathbb{C})$ und $A \cdot B = B \cdot A$
Dann gilt: $\exp A + B = \exp(A) \cdot \exp(B)$
K.1.3.2 $s, t \in \mathbb{R}: \quad \exp(A(s+t)) = \exp(As) \cdot \exp(At)$
S.1.3.3 Für $A \in M^{d\times d}(\mathbb{C})$ ist $t \to \exp(At)$ auf ganz $\mathbb{R}$ diffbar und es gilt: $\partial_t \exp(At) = A \cdot \exp(At)$
B.1.3.5 Koordinatentransformationen
Sei B invertierbar. Dann gilt: $\exp(B^{-1}AB) = B^{-1}\exp(A)B$

11 Differentialformen

11.1 Grundbegriffe der Vektoranalysis

$U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen $\psi : U \to \mathbb{R}$, $V = (V_1, V_2, V_3)^T : U \to \mathbb{R}^3$ stet. diffbar
Gradient: $[\mathrm{grad}(\psi)] = [\nabla\psi]_i = \partial_i\psi$
Divergenz: $\mathrm{div}(V) = \nabla \cdot V = \partial_1 V_1 + \partial_2 V_2 + \partial_3 V_3$
Rotation: $\mathrm{rot}(V) = \nabla \times V = \varepsilon_{ijk}\partial_j V_k \hat{e}_i$
S.2.1.1 **Satz von Gauß (Divergenzsatz)**
Sei $\Omega \subseteq U$ abgeschlossen mit positiv orientiertem Rand $\partial\Omega$:
Dann gilt: $\int_\Omega \nabla \cdot V \,\mathrm{d}v = \int_{\partial\Omega} V \cdot n \,\mathrm{d}a$
S.2.1.2 **Stokessche Formel**
$V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diffbar, $\Gamma \in U \subseteq \mathbb{R}^3$ 2-mal diffbare berandete Fläche.
Dann gilt: $\int_\Gamma \nabla \times V \cdot n \,\mathrm{d}a = \int_{\partial\Gamma} V \cdot t \,\mathrm{d}s$
L.2.1.3 Es gilt: $\mathrm{rot}(\nabla\psi) = 0$ und $\mathrm{div}(\nabla \times V) = 0$

11.2 Differentialformen

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $D \subseteq \mathbb{R}^k$ Produkt abgeschlossener Intervalle oder ein Simplex. Dann nennen wir eine diffbare Abbildung $\Phi : D \to U$ eine **k-Fläche** in U. D wird Parameterbereich von Φ genannt. Eine **Differentialform** der Ordnung $k \geq 1$ in U (k-Form) ist eine Funktion ω von der Menge $\mathcal{F}(U, k)$ aller k-Flächen in U nach $\mathbb{R}$:

$$\omega = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{d} a_{i_1,\ldots,i_k}(x)\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

$$\int_\Phi \omega = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \int_D a_{i_1,\ldots,i_k}(\Phi(u)) \det\left(\frac{\partial(\Phi_{i_1},\ldots,\Phi_{i_k})}{\partial(u_{i_1},\ldots,u_{i_k})}\right) \mathrm{d}u$$

$\det\left(\frac{\partial(\Phi_{i_1},\ldots,\Phi_{i_k})}{\partial(u_{i_1},\ldots,u_{i_k})}\right)$ bezeichnet die Jakobi-Determinante der Abbildung $u \to (\Phi_{i_1}(u), \ldots, \Phi_{i_k}(u))$ Jakobi-Matrix: $J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$
Sind Koeffizientenfunktionen r-mal diffbar, schreiben wir $\omega \in \mathcal{C}^r$.
Eine **0-Form** in U ist eine stetige reellwertige Funktion auf U.
Es gilt: $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i$ und $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i = 0$
es existieren keine von 0 verschiedenen k-Formen auf $\mathbb{R}^d$ mit $d < k$
Wachsender k-Index: $I = (i_1, \ldots, i_k)$, falls $1 \leq i_1, < \ldots < i_k \leq d$
k-Grundform: $\mathrm{d}x_I = \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$
$N(i_1, \ldots, i_k)$ = Anzahl Vertausch. zum Umwand. bel. Tupels in I
$\sigma(i_1, \ldots, i_k) = (-1)^{N(i_1,\ldots,i_k)} \Rightarrow \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} = \sigma(i_1, \ldots, i_k)\mathrm{d}x_I$
Normaldarstellung: $\sum_I b_I(x)\mathrm{d}x_I$

S.2.2.2 Sei ω eine k-Form auf $U \subseteq \mathbb{R}^d$ mit Normaldarstellung. Dann ist $b_I = 0$ auf U für alle wachsende k-Indizes $\Leftrightarrow \omega = 0$

11.2.3 Multiplikation und Differentiation

I, J Multiindizes. $I \cap J = \emptyset$, falls sie keinen gemeins. Eintrag haben.
$[I, J] = p + q$-Index. $\alpha(I, J)$ min. Anzahl an Vertauschungen um $(i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q)$ in $[I, J]$ umzuwandeln.
Definition: $\mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J = (-1)^{\alpha(I,J)}\mathrm{d}x_{[I,J]}$
L.2.2.3 $I, J \subseteq \{1, \ldots, d\}$ Indizes der Länge p, q. $I \cap J = \emptyset$
Dann gilt: $\alpha(I, J) = \#\{(s, t) \mid 1 \leq s \leq p, 1 \leq t \leq q, i_s > j_t\} \bmod 2$
L.2.2.4 $\mathrm{d}x_I \wedge (\mathrm{d}x_J \wedge \mathrm{d}x_K) = (\mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J) \wedge \mathrm{d}x_K$
Sind ω, λ beliebige p- und q-Formen mit $p, q \geq 1$:
$\omega \wedge \lambda = \sum b_I(x)c_J(x)\mathrm{d}x_I\mathrm{d}x_J = \sum(-1)^{\alpha(I,J)}b_I(x)c_J(x)\mathrm{d}x_{[I,J]}$
L.2.2.5 ω, λ, κ belieb. p-, q- und r-Formen auf $U \subseteq \mathbb{R}^d$. Dann gilt:
a) $(\omega + \lambda) \wedge \kappa = (\omega \wedge \kappa) + (\lambda \wedge \kappa)$ c) $(\omega \wedge \lambda) \wedge \kappa = \omega \wedge (\lambda \wedge \kappa)$
b) $\omega \wedge (\lambda + \kappa) = (\omega \wedge \lambda) + (\omega \wedge \kappa)$
Ableitung einer diffbaren **0**-Form f: $\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} f(x)\mathrm{d}x_i$
Ableitung einer diffbaren **k**-Form ω: $\mathrm{d}\omega = \sum_I(\mathrm{d}b_I) \wedge \mathrm{d}x_I$
L.2.2.7 ω k-Form und λ m-Form der Klasse $\mathcal{C}^1$ auf $U \subseteq \mathbb{R}^d$, so gilt:
a) $\mathrm{d}(\omega \wedge \lambda) = (\mathrm{d}\omega) \wedge \lambda + (-1)^k\omega \wedge \mathrm{d}\lambda$
b) Ist ω von Klasse $\mathcal{C}^2$, so gilt: $\mathrm{d}^2\omega = \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$

11.2.4 Substitutionen

$U \subseteq \mathbb{R}^d, V \subseteq \mathbb{R}^{d'}$ offen und $T : U \to V$ stetig diffbar. Zudem $\omega = \sum_I b_I \cdot \mathrm{d}y_I$ eine k-Form auf V. $T(x) = (t_1(x), \ldots, t_{d'}(x))^T$

$$\omega_T = \sum_I b_I \circ T \cdot \mathrm{d}t_I = \sum_I b_I \cdot \mathrm{d}t_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}t_{i_k}$$

Differentialform ω auf V wird über T nach U **'transportiert'**.
Spezialfall: 0-Form $f_T = f \circ T$
S.2.2.9 ω k-Form und λ m-Form auf V. Dann gilt:
a) $(\omega + \lambda)_T = \omega_T + \lambda_T$ falls $k = m$
b) $(\omega + \lambda)_T = \omega_T \wedge \lambda_T$
c) $\mathrm{d}(\omega_T) = (\mathrm{d}\omega)_T$, falls $\omega \in \mathcal{C}^1$ und $T \in \mathcal{C}^2$
L.2.2.10 $W \subseteq \mathbb{R}^{d''}$ offen, sowie $T : U \to V$, $S : V \to W$ diffbar
Zudem ω k-Form auf W. Dann gilt: $(\omega_S)_T = \omega_{S\circ T}$
L.2.2.11 Sei $\Phi : D \to U \subseteq \mathbb{R}^d$ eine k-Fläche. Zudem sei $\Delta : D \to \mathbb{R}^k$ die durch $\Delta(u) = u$ gegebene k-Fläche im $\mathbb{R}^k$.
Dann gilt: $\int_\Phi \omega = \int_\Delta \omega_\Phi$
Determinante: $\det(A) = \sum_{\sigma\in S_d}(\prod_{j=1}^d a_{j,\sigma(j)}) \cdot \mathrm{sgn}(\sigma)$
L.2.2.12 $U \subseteq \mathbb{R}^d, V \subseteq \mathbb{R}^{d'}$ offen und $T : U \to V$ diffbar. Weiterhin ω k-Form auf V und $\Phi : D \to U$ eine k-Fläche in U.
Dann gilt: $\int_\Phi \omega_T = \int_{T\circ\Phi} \omega$

11.3 Der Satz von Stokes

k-dimensionaler **Standardsimplex**:
$Q_k = \{u \in \mathbb{R}^k \mid 0 \leq u_i \leq 1, \sum_{i=1}^k u_i \leq 1\} \quad Q_0 = \{0\}$
$\sigma : Q_k \to \mathbb{R}^d$ heißt **affin** (k-Simplex), wenn $A = \sigma(u) - \sigma(0)$ linear
Gilt $\sigma(0) = p_0$ und $\sigma(e_i) = p_i \in \mathbb{R}^d$ (e_i ist i-ter Einheitsvektor)
$\Rightarrow \sigma = [p_0, p_1, \ldots, p_k] \qquad \sigma(u) = p_0 + \sum_{i=1}^k u_i(p_i - p_0)$
Ist $\bar{\sigma} = [p_{i_0}, \ldots, p_{i_k}]$ und $\varepsilon = \mathrm{sgn}(i_0, \ldots, i_k) \Rightarrow \bar{\sigma} = \varepsilon\sigma$
L.2.3.2 $\sigma : Q_k \to \mathbb{R}^d$ affiner k-Simplex in $U \subseteq \mathbb{R}^d$ und $\bar{\sigma} = \varepsilon\sigma$
Dann gilt für jede k-Form ω auf U : $\int_{\bar{\sigma}} \omega = \varepsilon \cdot \int_\sigma \omega$
B.2.3.3 Für $k = 0$ und eine 0-Form $f : U \to \mathbb{R}$ setzen wir
$\int_\sigma f = f(\sigma(0))$ und $\int_{-\sigma} f = -f(\sigma(0))$
Eine affine **k-Kette** Γ in $U \subseteq \mathbb{R}$ (offen) ist eine endliche Familie orientierter k-Simplizes. Ist ω eine k-Form auf U: $\int_\Gamma \omega = \sum_{i=1}^k \int_{\sigma_i} \omega$
Der **Rand** eines affinen k-Simplex ist die affine $k-1$-Kette
$\partial\sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i \cdot [p_0, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_k]$
Der **Rand** einer affinen k-Kette $\Gamma \Rightarrow \partial\Gamma = \sum_{i=1}^r \partial\sigma_i$
B.2.3.5 Seien $V \subseteq \mathbb{R}^m, U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $T : V \to U$ 2-mal stetig diffbar. Ist $\sigma : Q_k \to V$ affiner k-Simplex, so nennt man $\Phi = T \circ \sigma : Q_k \to U$ gegebene k-Fläche einen **orientierten** k-Simplex der Klasse $\mathcal{C}^2$
k-Kette der Klasse $\mathcal{C}^2 : \Psi = \sum_{i=1}^r \Phi_i$
Gilt $\Phi_i = T \circ \sigma_i$ schreibt man $\Psi = T \circ \Gamma$ mit $\Gamma = \sum_{i=1}^r \sigma_i$
Integral von ω (k-Form) über die Kette $\Psi : \int_\Psi \omega = \sum_{i=1}^r \int_{\Phi_i} \omega$
Rand: $\Psi = \sum_{i=1}^r T_i \circ \sigma_i \Rightarrow \partial\Psi = \sum_{i=1}^r T_i \circ (\partial\sigma_i)$
S.2.3.7 **Satz von Stokes**
Sei Ψ k-Kette der Klasse $\mathcal{C}^2$ in der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ und ω eine $k-1$-Form der Klasse $\mathcal{C}^1$ auf U.
Dann gilt: $\boxed{\int_\Psi \mathrm{d}\omega = \int_{\partial\Psi} \omega}$

11.4 Differentialformen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Notation: $(x_1, x_2) \to (x, y)$, $(x_1, x_2, x_3) \to (x, y, z)$, $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$
S.2.4.1 **Satz von Green**
$U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, Φ 2-Kette der Klasse $\mathcal{C}^2$, $\alpha, \beta : U \to \mathbb{R}$ stetig diffbar
Dann gilt: $\int_{\partial\Phi}(\alpha\mathrm{d}x + \beta\mathrm{d}y) = \int_\Phi(\partial_x\beta - \partial_y\alpha)\mathrm{d}A$
Flächeninhalt der durch Φ parametrisierten Menge: $A(\Phi) = \int_\Phi \mathrm{d}A$
K.2.4.2 Sei Φ 2-Fläche mit positiver Jacobi-Determinante.
Dann gilt: $A(\Phi) = \int_{\partial\Phi} x\mathrm{d}y = -\int_{\partial\Phi} y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\partial\Phi} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$
Es gilt: $\|u \times v\| = \det\left(u, v, \frac{u\times v}{\|u\times v\|}\right)$

$\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to U \subseteq \mathbb{R}^3$ 2-Fläche in U und $f : U \to \mathbb{R}$
Flächenintegral $\int_\Phi f \mathrm{d}a = \int_D f(u) \cdot \|\partial_{u1}\Phi(u) \times \partial_{u2}\Phi(u)\| \mathrm{d}u$
Flächeninhalt $A(\Phi) = \int_D \|\partial_{u1}\Phi(u) \times \partial_{u2}\Phi(u)\| \mathrm{d}u$
Definiere: $N_\Phi(u) = \partial_{u1}\Phi(u) \times \partial_{u2}\Phi(u)$ und $n_\Phi(u) = \frac{N_\Phi(u)}{\|N_\Phi(u)\|}$
S.2.4.4 **Satz von Gauß** Sei Ψ eine 3-Kette der Klasse $\mathcal{C}^2$ in $U \subseteq \mathbb{R}^3$ und $V : U \to \mathbb{R}^3$ ein diffbares Vektorfeld.
Dann gilt: $\boxed{\int_\Psi \nabla \cdot V \mathrm{d}v = \int_{\partial\Psi} \langle V, n_{\partial\Psi} \rangle \mathrm{d}a}$
Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine diffbare Kurve. Dann ist γ rektifizierbar.
Länge der Kurve: $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(u)\| \mathrm{d}u$
Allgemein: $f : \gamma([a, b]) \to \mathbb{R} \Rightarrow \int_a^b f \mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(u)) \cdot \|\gamma'(u)\| \mathrm{d}u$
S.2.4.5 **Formel von Stokes**
Sei Φ eine 2-Kette der Klasse $\mathcal{C}^2$ in $U \subseteq \mathbb{R}^3$ und $V : U \to \mathbb{R}^3$ ein diffbares Vektorfeld.
Dann gilt: $\boxed{\int_\Phi \langle \nabla \times V, n_\Phi \rangle \mathrm{d}a = \int_{\partial\Phi} \langle V, t_{\partial\Phi} \rangle \mathrm{d}s}$

11.5 Geschloss. und exakte Differentialformen

Eine Differentialform ω der Ordnung k auf $U \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt **geschlossen**, falls $\mathrm{d}\omega = 0$ auf ganz U gilt. Sie heißt **exakt** falls eine $(k-1)$-Form λ auf U existiert, für die $\omega = \mathrm{d}\lambda$ gilt. Nach L.2.2.7 ist jede exakte k-Form der Klasse $\mathcal{C}^1$ geschlossen.
S.2.5.2 **Lemma von Poincarè**
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und konvex und $k \geq 1$. Dann ist eine k-Form ω der Klasse $\mathcal{C}^1$ auf U genau dann exakt, wenn sie geschlossen ist.
K.2.5.4 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und konvex, $V \subseteq \mathbb{R}^{d'}$ offen und $T : U \to V$ ein $\mathcal{C}^2$ Diffeomorphismus (T und T^{-1} 2-mal stetig diffbar). Dann ist jede geschlossene Differentialform auf V auch exakt.

12 Fourier-Analysis

12.1 Maß- und Integrationstheorie

Ziel: Teilmengen eines Grundraumes X eine Größe bzw. ein Volumen zuordnen. Auf $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ wird eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_0^+$ definiert, welches als Maß bezeichnet wird.
Zum Grundraum X heißt $\mathcal{A} \subseteq (P)(X)$ eine **σ-Algebra** auf X:
$(\mathcal{A}1)$ $X \subseteq \mathcal{A}$
$(\mathcal{A}2)$ $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C = X \backslash \mathcal{A}$
$(\mathcal{A}3)$ $A_n \in \mathcal{A} \, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$
B.3.1.1 Es folgt $\emptyset \in \mathcal{A}$. Seien $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$. σ-Algebren sind abgeschlossen unter endlichen Vereinigungen.
B.3.1.2 Beispiele: $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ oder $\mathcal{P}(X)$
Ein Paar $(X, \mathcal{A})$ wir als **messbarer Raum** bezeichnet. Mengen aus $\mathcal{A}$ heißen **messbar**. Ein **Maß** μ auf $(X, \mathcal{A})$ ist eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_0^+ \cup +\infty$, die **$\sigma$-additiv** ist, das heißt: $\mu(\uplus_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu A_n$ $\forall$ Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen
Maßraum: $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Ist $\mu(X) \leq \infty \Rightarrow$ endliches Maß
Ist $\mu(X) = 1$ spricht man vom Wahrscheinlichkeitsmaß.
Erzeugte σ-Algebra: Ist $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein beliebiges Mengensystem, so ist $\sigma(\mathcal{S}) = \bigcap_{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{A}} \mathcal{A}$ eine σ-Algebra
B.3.1.3 Ist $(X, \mathcal{O})$ ein topolog. Raum, wird die (von offenen Mengen erzeugte) σ-Algebra $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{O})$ **Borelsche** σ-Algebra bezeichnet.
Man nennt $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ einen **σ-Ring**, falls gilt:
$(\mathcal{S}1)$ $\emptyset \in \mathcal{S}$
$(\mathcal{S}2)$ $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$
$(\mathcal{S}3)$ $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow \exists A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S} : B \backslash A = \uplus_{k=1}^n A_n$
$\mathcal{S}$ heißt **durchschnittsstabil**, falls: $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$
$\nu : \mathcal{S} \to \mathbb{R}_0^+$ heißt endlich **additiv**, falls für jede Familie $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$ gilt: $\nu(\uplus_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \nu A_k$
ν heißt **σ-subadditiv**, falls für alle $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$:
$A \subseteq \bigcup A_n \in \mathcal{S} \Rightarrow \nu(A) \leq \nu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$
ν heißt **σ-endlich**, falls eine wachsende Folge $A_n \in \mathcal{S}$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$ und $\nu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert.
T.3.1.4 **Fortsetzungssatz von Caratheodory**
Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Semiring und $\nu : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^+$eine additive und σ-subadditive Funktion. $\Rightarrow \exists$ Maß μ auf $(X, \sigma(\mathcal{S})$, dass $\mu_{|\mathcal{S}} = \nu$ erfüllt und als **Fortsetzung** von ν auf $\sigma(\mathcal{S})$ bezeichnet wird.
Ist ν σ-endlich, so ist μ eindeutig bestimmt.

Bsp.3.1.5 $X = \mathbb{R}$. $\mathcal{S} = \{(a, b] \mid a < b \in \mathbb{R}\}$ Semiring.
$\nu((a, b]) = b - a$ σ-subadditiv und σ-endlich. Deren Fortsetzung λ auf $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ wir **Lebesgue-Maß** genannt.
B.3.1.6 μ Maß auf $(X, \mathcal{A})$: $\mathcal{N}_\mu = \{A \subseteq X \mid \exists B \in \mathcal{A} : A \subseteq B, \mu(B) = 0\}$. Vervollständigung von $\mathcal{A} : \bar{\mathcal{A}} = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N})$
Sei $(X, \mathcal{A})$ messbar. $f : X \to \mathbb{R}$ heißt **messbar**, falls für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Menge $f^{-1}((-\infty, a]) = \{x \in X \mid f(x) \leq a\}$ messbar ist.
B.3.1.7 Stetige Funktionen auf X sind messbar bezüglich $(X, \mathcal{B})$
B.3.1.8 Summen, Produkte, Quotienten und Kompositionen messbarer Funktionen sind messbar.
Eine messbare Funktion $T : X \to \mathbb{R}$ heißt **messbare Treppenfunktion**, falls $T(X)$ endlich. Es gilt: $T = \sum_{j=1}^m a_j \cdot 1_{A_j}$
Familie aller messbaren Treppenfunktionen: $\mathcal{T} = \mathcal{T}(X, \mathcal{A})$
μ Maß, $T : X \to \mathbb{R} : \int_X T(x) \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{j=1}^n a_j \cdot \mu(A_j)$
Ist $f : X \to \mathbb{R}_0^+$ messbar: **Integral** von f bzgl. μ gegeben durch: $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sup\{\int_X T \, \mathrm{d}\mu \mid T \in \mathcal{T}(X, \mathcal{A}), T \leq f\}$
Für $f : X \to \mathbb{R}$ definiere man $f^\pm(x) = \begin{cases} \pm f(x) & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
f^+, f^- intbar $\Rightarrow f$ **integrierbar**: $\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_X f^+ \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \mathrm{d}\mu$
B.3.1.9 a) Das Integral ist linear und monoton bezüglich f.
b) Ist μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$, heißt es Lebesgue-Integral.
c) f Riemann-intbar $\Rightarrow f$ Lebesgue-intbar (gleicher Wert).
L.3.1.10 Pktw. Limite messbarer Funktionenfolgen sind messbar.
S.3.1.11 **Monotone Konvergenz**
Ang. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsende Folge messbarer Funktionen und ist f_1 integrierbar.
Dann gilt: $\int_X \lim_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert μ-fast überall/sicher** gegen f, falls $A \subseteq X$ mit $\mu(X \backslash A) = 0$ existiert, sodass $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \, \forall x \in X$
f auf X hat Eigenschaft μ-fast überall, wenn sie auf A erfüllt ist.
S.3.1.12 **Majorisierte Konvergenz (Satz von Lebesgue)**
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ messbare Funkt.folge, die μ-fast überall gegen f konvergiert. Zudem sei g (**Majorante**) nicht-negative, intbare Fkt. auf X, für die $|f_n| \leq g$ μ-fast überall $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:
Dann folgt: $\int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$
Definition: $p \in \mathbb{N} : \mathcal{L}^p = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ messbar}, \int_X |f|^p \mathrm{d}\mu < \infty\}$
Pseudonorm (ohne pos. Def.) auf $\mathcal{L}^p$: $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$
$f \sim g :\Leftrightarrow \|f - g\|_p = 0$ eine ÄR. $\Rightarrow L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu)/\sim$ norm. VR
S.3.1.13 $(L^p(\mu), \|.\|_p)$ vollständiger normierter VR. Im Fall $p = 2$ ist es ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_X f \cdot \bar{g} \, \mathrm{d}\mu$
S.3.1.15 Ist μ das Lebesgue-Maß auf $X = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, so liegt $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ dicht in $((L^p(\mu), \|.\|_p)$

12.2 Hilberträume und Fourier-Entwicklung

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine **Hermitesche Form** auf X: $\langle ., . \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ ist eine Abbildung:
(H1) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle y, z \rangle$
(H2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
(H3) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
Gilt $\langle x, x \rangle \geq 0 \, \forall x \in X \backslash \{\vec{0}\}$, so heißt $\langle ., . \rangle$ **positiv semi-definit**
Gilt $\langle x, x \rangle > 0 \, \forall x \in X \backslash \{\vec{0}\}$, so heißt $\langle ., . \rangle$ **positiv definit**
Eine positiv definite hermitesche Form heißt **Skalarprodukt**.
B.3.2.1 $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$, $\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$
S.3.2.2 **Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung**
Ist $\langle ., . \rangle$ eine pos. semi-definite hermit. Form: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$
K.3.2.3 Die Abbildung $\langle ., . \rangle X \times X \to \mathbb{K}$ ist stetig.
S.3.2.4 Ist $\langle ., . \rangle$ ein Skalarprodukt auf X, so wird durch $\|x\|_X = \langle x, y \rangle^{\frac{1}{2}}$ eine Norm definiert.
B.3.2.5 Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, so wird $L^2(\mu)$ mit dem Skalarprodukt: $\langle f, g \rangle = \int_\Omega f \cdot \bar{g} \, \mathrm{d}\mu$ zum **Hilbertraum** (HR)
L.3.2.6 Ist $\langle ., . \rangle$ Skalarprodukt auf X und $\|.\|$ die Norm, gilt das **Parallelogramm-Gesetz**: $\|x+y\|_X^2 + \|x-y\|_X^2 = 2\|x\|_X^2 + 2\|y\|_X^2$
B.3.2.7 Gilt das Parallelogramm-Gesetz $\Rightarrow \exists \langle ., . \rangle$
$\mathbb{K} = \mathbb{R} : \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|_X^2 - \|x - y\|_X^2)$
$\mathbb{K} = \mathbb{C} : \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|_X^2 - \|x-y\|_X^2 + i\|x+iy\|_X^2 - i\|x-iy\|_X^2)$
Definition **Banachraum**: Vollständiger Vektorraum. Ist VR X + induzierte Norm ein Banachraum $\Rightarrow (X, \langle ., . \rangle)$ Hilbertraum
Begriffe Sei X ein $\mathbb{K}$-VR
a) $x, y \in X$ heißen **orthogonal** ($x \perp y$) falls: $\langle x, y \rangle_X = 0$

b) $A, B \subseteq X$ heißen **orthogonal**, falls $x \perp y \; \forall x \in A, y \in B$
c) $A^\perp = \{x \in X \mid \forall y \in A : x \perp y\}$ **orthogonales Komplement**
d) $B \subseteq X$ heißt **Orthonormalsystem** falls für beliebige $x \neq y \in B : \|x\|_X = 1$ und $\langle x, y\rangle = 0$
e) Orthonormalsystem S heißt **maximal**: $\forall S' : S \subseteq S' \Rightarrow S = S'$
L.3.2.8 **Satz von Pythagoras**: $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|_X^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
Definition Sei X Banachraum und I bel. Indexmenge. Wir sagen, $\sum_{i\in I} x_i$ **konvergiert unbedingt** gegen $x \in X$, falls $I_0 = \{i \in I \mid x_i \neq 0\}$ höchstens abzählbar ist und für $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Summe $\sum_{i\in I} x_i$ gegen x konvergiert: $x = \sum_{i\in I} x_i$
L.3.2.9 Sei S Orthonormalsystem im Hilbertraum X.
a) $x = \sum_{e\in S} a(e)e$ und $y = \sum_{e\in S} b(e)e : \langle x, y\rangle = \sum_{e\in S}\langle x, e\rangle\langle e, y\rangle$
b) $x \in X, \tilde{S} \subseteq S$ und $y = \sum_{s\in\tilde{S}}\langle x, e\rangle e$ so gilt: $(x - y) \perp y$
L.3.2.10 Sei X HR und $S \subseteq X$ ein Orthonormalsystem. $\forall x \in X$:
a) $S_x = \{e \in S \mid \langle x, e\rangle \neq 0\}$ ist höchstens abzählbar
b) $\sum_{e\in S} |\langle x, e\rangle|^2$ und $\sum_{e\in S}\langle x, e\rangle e$ sind unbedingt konvergent
Es gilt: $\sum_{e\in S} |\langle x, e\rangle|^2 \leq \|x\|_X^2$ **Bessel'sche Ungleichung**
c) $x \in \overline{\text{lin}}(S) \;\Leftrightarrow\; x = \sum_{e\in S}\langle x, e\rangle e \;\Leftrightarrow\; \|x\|^2 = \sum_{e\in S} |\langle x, e\rangle|^2$
S.3.2.11 X HR und $S \subseteq X$ Orthonormalsystem. Dann $\Leftrightarrow$
a) S ist maximal.
b) Gilt $x \perp e$ für alle $e \in S$, so ist $x = 0$
c) $\overline{\text{lin}}(S) = X$
d) $\forall\, x \in X : x = \sum_{e\in S}\langle x, e\rangle e$ (Fourier-Entwicklung)
e) $\forall\, x \in X : \|x\|_X^2 = \sum_{e\in S} |\langle x, e\rangle|^2$ (**Parseval'sche Gleichung**)
Bemerkung Sei μ das Lebesgue-Maß auf $[0, 1]$. Dann wird $L^2(\mu)$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_{[0,1]} f\bar{g}\, \mathrm{d}\mu$ zum HR
X MR, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ kompl. **Funktionen-Algebra**: $\forall\, f, g \in \mathcal{A}$:
(A1) $f + g \in \mathcal{A}$ (A2) $f \cdot g \in \mathcal{A}$
(A3) $c \cdot f \in \mathcal{A}$ (A4) $\bar{f} \in \mathcal{A}$
$\mathcal{A}$ separiert Punkte in X, falls $\forall\, x \neq y \in X\; \exists f \in \mathcal{A} : f(x) \neq f(y)$
$\mathcal{A}$ verschwindet in keinem Punkt, falls $\forall\, x \in X\; \exists f : f(x) \neq 0$
Abgeschlossene Hülle von $\mathcal{A}$: cl$(\mathcal{A})$ in $(\mathcal{F}(X, \mathbb{R}), d_\infty)$
S.3.2.12 **Satz von Stone-Weierstrass**. X kompakt. MR, $\mathcal{A}$ komplex. Algebra auf X, separierend und nicht verschwindend. Dann ist die abgeschlossene Hülle von $\mathcal{A}$ gleich $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$
Es gilt: $L^2(\mu) = \overline{\text{lin}}(\{x \mapsto \exp(2\pi nix) \mid n \in \mathbb{Z}\})$

12.3 Pktw. Konvergenz von Fourierreihen

Partialsum. in der Fourierentwickl. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}, f \in L^2(\mu), N \in \mathbb{N}$
$s_N(f, x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) \exp(2\pi inx)$
n-ter **Dirichlet-Kern**: $D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} \exp(2\pi int)$
L.3.3.1 Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt:
a) $\hat{D}_N(t) = \frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin(\pi t)}$
b) $\int_{\mathbb{T}} D_N(t)\mathrm{d}t = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{D}_N(t)\mathrm{d}t = 1$
Sei $(X, d)MR, f : X \to \mathbb{C}$. f ist in $x \in X$ **lokal lipschitzstetig**, falls $L, \delta > 0$ existieren, sodass für alle $y \in B_\delta(x)$ gilt:
$|f(y) - f(x)| \leq L \cdot d(x, y)$
S.3.3.2 Sei $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ in $L^2(\mu)$ beschränkt und Lipschitzstetig in $x \in \mathbb{T}$. Dann gilt: $\lim_{n\to\infty} s_N(f, x) = f(x)$
K.3.3.3 a) Ist $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ beschränkt in $L^2(\mu)$ und gilt $f = 0$ auf offenem Intervall $I \subseteq \mathbb{T}$, so folgt $\lim_{N\to\infty} s_N(f, x) = 0 \;\forall x \in I$
b) Sind $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ beschränkt in $L^2(\mu)$ und gilt $f = g$ auf offenem Intervall $I \subseteq \mathbb{T}$, so folgt $\lim_{N\to\infty} s_N(f, x) = \lim_{N\to\infty} (g, x) \;\forall x \in I$
B.3.3.5 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ heißt 1-periodisch, falls $f(x + n) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d, n \in \mathbb{Z}^d$ gilt.

12.4 FT auf dem Schwartzraum

Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d : |\alpha| = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j \quad x^\alpha = \prod_{j=1}^{d} x_j^{a_j}$
d-mal stetig diffbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} : D^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$
B.3.4.1 a) $d \in \mathbb{N}, \xi \in \mathbb{R}^d, \mu$ beliebiges Maß, $f \in L^1(\mu)$
So gilt: $|\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \exp(-i\langle x, \xi\rangle)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\mathrm{d}x = \|f\|_1$
b) Ist μ endlich: $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |f|\mathrm{d}\mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} 1 + |f|^2\mathrm{d}\mu \leq \mu(\mathbb{R}^d) + \|f\|_2^2$
Daraus folgt: $L^2(\mu) \subseteq L^1(\mu)$
c) Ist μ unendlich: $\mu(\mathbb{R}^d) = \infty$, gilt $L^2(\mu) \subseteq L^1(\mu)$ nicht mehr
Fouriertrafo: $\mathcal{F}(f)(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \exp(-i\langle, x, \xi\rangle)\mathrm{d}x$
B.3.4.2 a) $\overline{\mathcal{F}(f)}(\xi) = \mathcal{F}(\bar{f})(-\xi)$
b) $\mathcal{F}(f \exp(-i\langle x, \xi_0\rangle)) = \mathcal{F}(f)(\xi + \xi_0)$
c) für $I(x) = -x$ gilt: $\mathcal{F}(f \circ I) = \mathcal{F}(f) \circ I$
Inverse FT: $\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\xi) \exp(i\langle x, \xi\rangle)\mathrm{d}\xi$
B.3.4.3 Träger von f: $\text{Tr}(f) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}$
$\mathcal{C}_/(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \mid \lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = 0\}$
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \mid \text{Tr}(f) \text{ ist kompakt}\}$
S.3.4.4 Ist μ Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$, so liegt $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^1(\mu)$
L.3.4.5 Für $f \in L^1(\mu)$ gilt $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{C}_0$ und $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq (2\pi)^{-d/2} \cdot \|f\|_1$. Zudem ist $\mathcal{F}$ als Abb. $L^1(\mu) \to \mathcal{C}_0$ linear
$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ **schnell fallend**, falls $\forall\alpha \in \mathbb{N}_0^d$: $\lim_{\|x\|\to\infty} x^\alpha f(x) = 0$
Schwartzraum: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \mid D^\beta f \;\forall\beta \in \mathbb{N}_0^d \text{ schn. fall.}\}$
B.3.4.7 a) Ist f Schwartzfunktion (SF), so auch jede partielle Ableitung $D^\alpha f$ und jedes Produkt $x \mapsto x^\alpha f(x)$
b) $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ SF $\Leftrightarrow$ für jede partielle Ableitung $D^\alpha f$ und jedes Polynom $P : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$: $\lim_{\|x\|\to\infty} P(x) \cdot D^\alpha f(x) = \lim_{\|x\|\to\infty} \|x\|^m f(x) = 0$
c) SF sind integrierbar und quadratintegrierbar.
d) f SF $\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}_0^d : x \in \mathbb{R}^d(1 + \|x\|^m) \cdot |D^\alpha f(x)| < \infty$
e) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \mathcal{S}$ liegt dicht in $L^1(\mu)$
L.3.4.8 Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$
a) $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ und $D^\alpha\mathcal{F}(f) = -i^{|\alpha|}\mathcal{F}(x^\alpha f)$
b) $\mathcal{F}(D^\alpha f) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha\mathcal{F}(f)$
K.3.4.9 Es gilt $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$
L.3.4.10 $f, g \in L^1(\mu) : \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(f)(\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathcal{F}(g)(x)\mathrm{d}x$
L.3.4.11 $\gamma(x) = \exp(-\langle x, x\rangle)/2 \quad \gamma_a = \gamma(ax)a \in \mathbb{R}$ Es gilt:
$(2\pi)^{-d/2} \int \mathbb{R}^d\gamma(x)\mathrm{d}x = 1 \quad \mathcal{F}(\gamma) = \gamma \quad \mathcal{F}(\gamma_a)(\xi) = a^{-d}\mathcal{F}(\gamma)(\gamma/a)$
L.3.4.12 Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt: $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x) = f(-x)$
S.3.4.13 Die FT ist eine Bijektion auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mit Inverse $\mathcal{F}^{-1}$
L.3.4.14 Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gilt: $\langle\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g)\rangle = \langle f, g\rangle$
K.3.4.15 $\exists$ lineare Isometrie $\mathcal{F}_2 : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ die $\mathcal{F}_{2|\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = \mathcal{F}$ erfüllt. **Plancherel-Gleichung**: $\langle\mathcal{F}_2(f), \mathcal{F}_2(g)\rangle = \langle f, g\rangle$
$B_R = B_R(0) \quad g_R = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \exp(-i\langle x, \xi\rangle)\mathrm{d}x$
S.3.4.16 a) $f \in L^1(\mu) \cap L^2(\mu) : \mathcal{F}_2(f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)$ μ-fast sicher
b) Für $f \in L^2(\mu)$ gilt $\mathcal{F}_2 = \lim_{R\to\infty} g_R$ im Sinne der L^2-Konvergenz
L.3.4.17 a) Sei $f \in L^1(\mu) \cap L^2(\mu)$. Dann existiert $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mit $\lim_{n\to\infty} |f - f_n|_1 = \lim_{n\to\infty} |f - f_n|_2 = 0$
b) Für Funktionenfolge $f_n \in L^1(\mu)$ mit $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f|\mathrm{d}\mu = 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ μ-fast sicher
Faltung von SF: $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) : f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) \cdot g(y)\mathrm{d}y$
L.3.4.18 Seien $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt:
a) $\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{d/2} \cdot \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$
b) $\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g) = (2\pi)^{d/2} \cdot \mathcal{F}(f \cdot g)$